Matemáticas

QUINTO CURSO

21 junio 1963 B.O.M.E. 11 julio 1963

72 ptas.

EDELVIVES

MATEMATICAS

QUINTO CURSO

Número de Registro: Z. - 1209 - 62

Imprenta Editorial Luis Vives, S.A.
Paseo de Fernando el Católico, 63
ZARAGOZA. — 1964

Depósito legal. Z. 213 -58

QUINTO CURSO

MATEMATICAS

POR

EDELVIVES

Aprobado por O. M. de 21-VI-1963
«B. O. M. de E. N.», núm. 55, del 11-VII-1963
Año de publicación: 1964. — Precio: 72 ptas.

EDITORIAL LUIS VIVES, S. A. — ZARAGOZA

ÍNDICE

COMPLEMENTOS DE ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA

Lecs.		Págs.
1.ª	Iniciación al método racional	5
2.ª	Sistemas de numeración	10
3.ª	Propiedades de la numeración en un sistema de base cualquiera	14
4.ª	Práctica de las cuatro operaciones en un sistema de base cualquiera	16
5.ª	Semejanza	19
6.ª	Homotecia	25
7.ª	Simetría	28
	Lección complementaria. — Potencia de un punto respecto de una circunferencia.—Eje y centro radical	34
8.ª	Métodos de resolución de problemas	39
9.ª	Métodos especiales de la Geometría métrica: métodos de traslación y de simetría	48
10.	Métodos especiales de la Geometría métrica: métodos de rotación y de semejanza	54
11.	Métodos especiales de la Geometría métrica: métodos de los lugares geométricos	57

ÁLGEBRA

12.	La función exponencial	63
13.	La función logarítmica	67
14.	Los logaritmos decimales	72
15.	Cálculo logarítmico	80
16.	Progresiones aritméticas	89
17.	Progresiones geométricas	99
18.	Interés compuesto y anualidades	113
19.	Vectores planos	123
20.	Operaciones con vectores	128
21.	Los números complejos	135
22.	Operaciones con números complejos	142

TRIGONOMETRÍA

Lecs.		Págs
23.	Las funciones circulares	153
24.	Relaciones entre las funciones trigonométricas de ciertos ángulos.	163
25.	Proyecciones. Teoremas de adición de ángulos	178
26.	Teoremas de adición de funciones	188
27.	Tablas trigonométricas	190
28.	Resolución de triángulos rectángulos	201
29.	Fórmulas para la resolución de triángulos oblicuángulos	208
30.	Resolución de triángulos oblicuángulos	215
31.	Aplicaciones prácticas de la Trigonometría	223

AMPLIACIÓN DEL ÁLGEBRA

32.	Funciones	232
33.	Noción de derivada	241
34.	Las funciones de la proporcionalidad	245
35.	El trinomio de segundo grado	249
36.	Nociones de combinatoria	255
37.	Combinaciones	261
38.	Potencia del binomio	267
39.	Frecuencia y probabilidad	273
40.	Nociones de estadística	279
41.	Nociones de estadística (continuación)	287
	Apéndice: *Ejercicios complementarios*	292
	Tabla de valores naturales de las funciones trigonométricas	296
	Tabla de razones trigonométricas	297

1. Iniciación al método racional

1. Postulados. — POSTULADOS O AXIOMAS *son aquellas proposiciones cuya certeza se admite, ya sea por su propia evidencia o porque están de acuerdo con los resultados de la experiencia.*

Dichas proposiciones se toman como ciertas sin razonarlas, y sirven de base para razonamientos posteriores.

EJEMPLOS: 1) *El todo es mayor que cualquiera de sus partes.*
2) *Por dos puntos puede pasar una recta y solamente una.*
3) *Por un punto no se puede trazar más que una paralela a una recta.* (Postulado de Euclides).

2. Teoremas: hipótesis; tesis; demostración. — TEOREMAS *son aquellas proposiciones cuya certeza se prueba mediante un razonamiento, llamado demostración.*

Este razonamiento permite deducir lógicamente lo que se afirma en el enunciado, apoyándose para ello en otros teoremas o en los postulados.

El enunciado de un teorema consta de dos partes:

1.ª *Hipótesis,* que es la expresión de aquellos elementos o condiciones que se suponen.

2.ª *Tesis* o *conclusión,* que es la verdad que se deduce de la hipótesis.

EJEMPLO DE TEOREMA: *Si dos rectas se cortan formando ángulos adyacentes iguales, son perpendiculares.*

La hipótesis en este teorema es considerar dos rectas que se corten formando ángulos adyacentes iguales. La tesis o conclusión será que dichas rectas son perpendiculares.

No debe confundirse la demostración de un teorema con su *comprobación;* ésta consiste en la aplicación del teorema a casos particulares.

Lema es una proposición aclaratoria que a veces precede a los teoremas, con objeto de preparar o facilitar su demostración.

Corolario es una consecuencia que se deduce de un teorema.

Escolio es una observación o advertencia importante que se da a veces para aclarar un teorema.

3. Cadenas deductivas. — Las Matemáticas no son sino un conjunto de verdades deducidas unas de otras por razonamientos relativamente sencillos. La dificultad radica en que cada nuevo teorema, se funda en postulados o en teoremas anteriores cuyo conocimiento es imprescindible.

El conjunto de proposiciones y razonamientos, más o menos interdependientes, que desarrollan un grupo de conocimientos, constituyen las llamadas cadenas deductivas.

4. Teoremas directos, recíprocos y contrarios. — Dos teoremas son *recíprocos*, cuando la hipótesis de uno es conclusión o tesis del otro, y viceversa.

Dos teoremas son *contrarios*, cuando la hipótesis y la tesis de uno son, respectivamente, la negación de la hipótesis y de la tesis del otro.

He aquí un ejemplo con las cuatro clases de teoremas:

TEOREMA DIRECTO: *Si un punto pertenece a la bisectriz de un ángulo, equidista de los lados.*

TEOREMA RECÍPROCO: *Si un punto equidista de los lados de un ángulo, pertenece a la bisectriz.*

TEOREMA CONTRARIO DEL DIRECTO (contrario): *Si un punto no pertenece a la bisectriz de un ángulo, no equidista de los lados.*

TEOREMA CONTRARIO DEL RECÍPROCO (contrarrecíproco) (*): *Si un punto no equidista de los lados de un ángulo, no pertenece a la bisectriz.*

En general, designando la hipótesis por H y la tesis por T, podemos dar el siguiente esquema:

TEOREMA DIRECTO:	*Si se verifica* H, *se verificará* T.
TEOREMA RECÍPROCO:	*Si se verifica* T, *se verificará* H.
TEOREMA CONTRARIO:	*Si no se verifica* H, *no se verificará* T.
TEOREMA CONTRARRECÍPROCO:	*Si no se verifica* T, *no se verificará* H.

5. Relaciones entre estas cuatro clases de teoremas. — El que un teorema sea cierto no significa que hayan de serlo también su recíproco y su contrario. En el ejemplo del párrafo anterior, vemos cómo un teorema (directo), que es verdadero, ha dado lugar a un recíproco y un contrario, que son verdaderos también. En cambio, el teorema: «Si dos ángulos agudos tienen los lados respectivamente perpendiculares, dichos ángulos serán iguales», origina un recíproco y un contrario, que son falsos, ya que podemos muy bien considerar dos ángulos iguales, sin necesidad de ser agudos y tener los lados respectivamente perpendiculares.

De los cuatro teoremas: directo, recíproco, contrario y contrarrecíproco, basta con que se verifiquen los dos primeros, o el primero y tercero, para que se cumplan también los otros dos. Veámoslo.

(*) CONTRARIO DEL RECÍPROCO *y recíproco del contrario* son una misma cosa

I. SI EL DIRECTO Y SU RECÍPROCO SON VERDADEROS, TAMBIÉN LO SERÁN LOS CONTRARIOS DE AMBOS. En efecto: supongamos un teorema general cuyo enunciado sea éste: *Si* A *es igual a* B, *será* C *igual a* D.

Su recíproco, dirá: *Si* C *es igual a* D, *será* A *igual a* B. Admitiendo que ambos son ciertos, sucederá que lo es también el contrario, cuyo enunciado es como sigue:

Si A *no es igual a* B, *tampoco* C *será igual a* D.

Efectivamente: porque si *C* fuera igual a *D*, en virtud de lo supuesto (que el recíproco es verdadero), *A* y *B* serían iguales, lo cual es opuesto a la hipótesis.

De modo análogo demostraríamos la certeza del contrarrecíproco, que se enuncia así: *Si* C *no es igual a* D, *tampoco* A *será igual a* B.

II. SI EL DIRECTO Y SU CONTRARIO SON VERDADEROS, TAMBIÉN LO SERÁN LOS RECÍPROCOS DE AMBOS. Es decir, suponiendo que son ciertos el directo y el contrario, cuyos enunciados se expresan:

Directo: *Si* A *es igual a* B, *será* C *igual a* D.
Contrario: *Si* A *no es igual a* B, *tampoco* C *será igual a* D.

también lo son los otros dos, cuyos enunciados dicen:

Recíproco: *Si* C *es igual a* D, *será* A *igual a* B.
Contrarrecíproco: *Si* C *no es igual* D, *tampoco* A *será igual a* B.

En efecto: *a)* El recíproco es cierto, porque si *A* no es igual a *B*, tampoco *C* sería igual a *D* (según el contrario), lo que se opone a la hipótesis.

b) El contrarrecíproco es cierto, porque si *A* fuera igual a *B*, también *C* sería igual a *D* (según el directo), lo cual se opone a la hipótesis.

6. Condición necesaria y suficiente. — Para que la hipótesis de un teorema sea condición *necesaria* y *suficiente* de la tesis, hay que probar que el correspondiente teorema recíproco es verdadero.

EJEMPLOS. — Por ser ciertos estos dos teoremas: *a)* Directo: *Si un punto pertenece a la bisectriz de un ángulo, equidista de los lados;* y *b)* Recíproco: *Si un punto equidista de los lados de un ángulo, pertenece a la bisectriz,* podemos afirmar que: *La condición necesaria y suficiente para que un punto equidiste de los lados de un ángulo, es que pertenezca a la bisectriz.*

Por el contrario, como no es verdadero el recíproco de este teorema:

Si dos ángulos agudos tienen los lados respectivamente perpendiculares, dichos ángulos serán iguales, tendremos que decir que:

La condición suficiente, pero no necesaria, para que dos ángulos agudos sean iguales, es que tengan los lados respectivamente perpendiculares.

7. Ejemplos de aplicación. — Veamos cómo se demuestra un teorema en todas sus formas.

8. TEOREMA DIRECTO. — *Si un punto pertenece a la bisectriz de un ángulo, equidista de los lados.*

Hipótesis: El punto *D* (fig. 1) pertenece a la bisectriz *BD* del ángulo *ABC*.
Tesis: Las perpendiculares *DM* y *DN* (distancias a los lados), son iguales.
Demostración: Los triángulos *DMB* y *DNB* son rectángulos e iguales, por tener la hipotenusa común y el ángulo *MBD* de uno igual al *NBD* del otro. Por consiguiente, *DM* = *DN*.

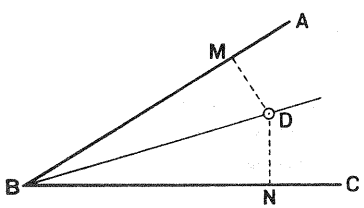


FIG 1

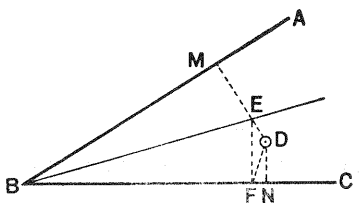


FIG. 2

9. TEOREMA RECÍPROCO. — *Si un punto equidista de los lados de un ángulo, pertenece a la bisectriz.*

Hipótesis: Las distancias *DM* y *DN* del punto *D* a los lados del ángulo *ABC* (figura 1), son iguales.
Tesis: Áng. *MBD* = áng. *NBD*, es decir, *BD* es la bisectriz del ángulo *ABC*.
Demostración: Triáng. *DMB* y triáng. *DNB* son rectángulos e iguales, por tener la hipotenusa común y el cateto *DM* = *DN*. Por consiguiente, áng. *MBD* = = áng. *NBD*.

10. TEOREMA CONTRARIO. — *Si un punto no pertenece a la bisectriz de un ángulo, no equidista de los lados.*

Hipótesis: El punto *D* (fig. 2) no está en la bisectriz *BE* del ángulo *ABC*.
Tesis: Las perpendiculares *DM* y *DN* (distancias del punto *D* a los lados), son desiguales.
Demostración: Tracemos la perpendicular *EF* al lado *BC* y unamos *D* con *F* por el segmento *DF*. Estando *E* en la bisectriz, tendremos que *EM* = *EF*. En el triángulo *DEF* se verifica: $DF < DE + EF$, desigualdad que se transforma en esta otra, si sustituímos *EF* por *EM*:

$$DF < DE + EM = DM$$

Ahora bien: *DN*, por ser perpendicular, es menor que la oblicua *DF*; luego con mayor razón $DN < DM$, como se quería demostrar.

En realidad no es necesario demostrar el teorema contrario (ni el contrarrecíproco), cuando se ha probado ya el directo y su recíproco, ya que, como vimos (núm. 5, I), *si un teorema y su recíproco son verdaderos, también lo serán sus contrarios.*

Por otra parte, para la demostración del contrario y del contrarrecíproco, suele acudirse al procedimiento llamado *por reducción al absurdo.*

11. Demostración por reducción al absurdo. — Consiste este procedimiento en admitir provisionalmente como falsa la tesis del teorema que se trata de demostrar, y mediante deducciones sucesivas, llegar a una consecuencia incompatible con algún postulado, o con otros teoremas ya demostrados.

12. Refiriéndonos al mismo teorema del párrafo 8, vamos a probar por reducción al absurdo, la verdad del teorema contrario y del contrarrecíproco.

a) DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA CONTRARIO. — *Si un punto no pertenece a la bisectriz de un ángulo, no equidista de los lados.*

En efecto: Supongamos que la tesis es falsa, es decir, que el punto equidista de los lados. En virtud del teorema recíproco, dicho punto pertenecería a la bisectriz. Como vemos, la suposición hecha nos ha llevado a la conclusión *absurda* de que un punto, a la vez, pertenece y no pertenece a una recta. Por tanto, el teorema propuesto es verdadero.

b) DEMOSTRACIÓN DEL CONTRARRECÍPROCO. — *Si un punto no equidista de los lados de un ángulo, no pertenece a la bisectriz.*

En efecto: Supongamos que el punto pertenece a la bisectriz. En virtud del teorema directo, dicho punto equidistaría de los lados del ángulo. Pero es imposible que un punto equidiste y no equidiste, a la vez, de los lados de un ángulo. Luego, el teorema propuesto es verdadero.

EJERCICIOS

a) *Enunciar el teorema recíproco, contrario y contrarrecíproco de los siguientes teoremas:*

b) *Demostrar el contrario y el contrarrecíproco por el método de reducción al absurdo.*

1. Si un punto pertenece a la mediatriz de un segmento, equidista de sus extremos.

2. Si dos oblicuas se apartan igualmente del pie de la perpendicular, son iguales.

3. Tomar otro teorema de libre elección y hacer lo indicado.

2. Sistemas de numeración

OBSERVACIÓN. — El programa oficial indica que en las lecciones 2.ª a 7.ª se haga el desarrollo racional de un capítulo de la Aritmética y otro de la Geometría, a libre elección del autor del texto o del Profesor. Nosotros dedicaremos las lecciones 2.ª, 3.ª y 4.ª a exponer el tema *Sistemas de numeración*, y en las lecciones 5.ª, 6.ª y 7.ª estudiaremos, respectivamente, la *Semejanza, Homotecia* y *Simetría* de figuras geométricas.

13. Sistemas de numeración. — Recordemos que *sistema de numeración* es el conjunto de reglas y principios cuyo objeto es la expresión oral y escrita de los números naturales.

Nuestro sistema decimal o décuplo es un caso particular de los que ahora vamos a estudiar.

El fundamento de todo sistema de numeración es el siguiente:

I. *Se toma como base un número* m *mayor que uno y se adoptan símbolos denominados cifras o guarismos, para representar el cero y los números menores que la base.*

En el sistema de base *seis*, éstos podrían ser: 0, 1, 2, 3, 4, 5. En el sistema duodecimal o de base *doce* podrían adoptarse: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α, β, donde α y β representan, respectivamente, el diez y el once de nuestro sistema decimal.

Prescindiendo del cero, las restantes cifras se llaman *significativas*.

II. *El número uno recibe el nombre de unidad simple o de primer orden. Cada* m *unidades de un cierto orden forman una unidad del orden superior.*

III. *Una cifra colocada a izquierda de otra representa unidades del orden inmediatamente superior al de ésta.* Este es el llamado *principio del valor relativo.*

14. Expresión polinómica de los números. — TEOREMA. *Elegida una base* $m > 1$, *todo número* N *puede expresarse de un modo único en la forma*

$$N = hm^k + gm^{k-1} + fm^{k-2} + \ldots + cm^2 + bm + a \qquad [1]$$

donde h, g, f, ..., c, b, a *representan números menores que* m.

Así, en el sistema decimal,

$$13.045 = 1 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5$$

En efecto: Haciendo la división entera de N por m, y dividiendo asimismo por m los sucesivos cocientes q_1, q_2, ..., que resultan, tenemos las siguientes operaciones y relaciones deducidas de las mismas:

$$
\begin{array}{l|l}
N & m \\
\hline
a & q_1 \quad | \quad m \\
\hline
\quad b & q_2 \quad | \quad m \\
\hline
\quad\quad c & q_3 \quad \cdot \quad \cdot \quad q_{k-2} \quad | \quad m \\
\hline
\quad\quad\quad f & q_{k-1} \quad | \quad m \\
\hline
\quad\quad\quad\quad g & h
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
N = q_1 m + a & [1] \\
q_1 = q_2 m + b & [m] \\
q_2 = q_3 m + c & [m^2] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
q_{k-2} = q_{k-1} m + f & [m^{k-2}] \\
q_{k-1} = hm + g & [m^{k-1}]
\end{array}
$$

Obsérvese que por ser $m > 1$, los cocientes $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{k-1}, h$, que se van obteniendo, son decrecientes y necesariamente se llega a uno menor que m.

Sumando miembro a miembro las anteriores igualdades, previamente multiplicadas por las potencias de m que figuran a la derecha de cada una de ellas, y suprimiendo sumandos comunes a ambos miembros, resulta la relación [1] que pretendíamos demostrar. El segundo miembro de [1] recibe el nombre de *expresión polinómica del número* N *en base* m, y los números $h, g, f, \ldots, c, b, a$, se llaman coeficientes del polinomio.

Probemos ahora que la expresión polinómica de un número en la base m es única. En efecto: De ser también

$$N = h'm^k + g'm^{k-1} + f'm^{k-2} + \ldots + c'm^2 + b'm + a' \qquad [2]$$

deduciremos de [1] y [2]:

$$
\begin{aligned}
N &= (hm^{k-1} + gm^{k-2} + fm^{k-3} + \ldots + cm + b)\, m + a = \\
&= (h'm^{k-1} + g'm^{k-2} + f'm^{k-3} + \ldots + c'm + b')\, m + a'
\end{aligned} \qquad [3]
$$

Como, además, en el enunciado del teorema se dice que a y a' son menores que m, según esta igualdad y en virtud de la propiedad uniforme de la división entera, debe ser $a = a'$, por ser ambas el resto de la división entera de N por m, y

$$
\begin{aligned}
&hm^{k-1} + gm^{k-2} + fm^{k-3} + \ldots + cm + b = \\
&= h'm^{k-1} + g'm^{k-2} + f'm^{k-3} + \ldots + c'm + b'
\end{aligned} \qquad [4]
$$

por ser ambos el cociente de la misma división.

Razonando con [4] lo mismo que con [3], probaríamos que $b = b'$. Y siguiendo así el razonamiento, demostraríamos que $c = c'$, etc., hasta probar la identidad de las expresiones [1] y [2].

15. Expresión de un número en el sistema de base m. — De la expresión polinómica [1] se deduce que un número N consta de a unidades simples, b unidades de segundo orden, c de tercer orden, ... La representación de dicho número la haremos así:

$$\underline{h}\,\underline{g}\,\underline{f} \ldots \underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a}_{(m} \qquad [5]$$

Las rayitas colocadas debajo de las letras son para indicar que no se trata de un producto de factores. La base del sistema se pone en forma de subíndice, precedida de un paréntesis. Los números expresados en el sistema decimal (base 10) no llevarán subíndice.

16. Paso de un sistema de numeración a otro. — PRIMER PROBLEMA. *Dado un número en el sistema decimal, expresarlo en el sistema de base* m.

Para resolver este problema se divide por la base m el número dado N y los cocientes enteros que vayan resultando, mientras la operación sea posible. Si $a, b, c, \ldots, f, g,$ son los restos enteros por defecto de las divisiones efectuadas, y $h < m$ el último cociente obtenido, la expresión del número será $\underline{h}\,\underline{g}\,\underline{f}\ldots\underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a}$.

EJEMPLO. — Expresar en el sistema de base 6 el número $12.453_{(10}$.

Tendremos:

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 12453 & & & & & & 6 \\ 045 & 2075 & & & & & 6 \\ 33 & 27 & 345 & & & & 6 \\ 3 & 35 & 45 & 57 & & & 6 \\ & 5 & 3 & 3 & 9 & & 6 \\ & & & & 3 & 1 & \end{array}$$

Luego, $12.453 = 133.353_{(6}$

SEGUNDO PROBLEMA. — *Dado un número en el sistema de base* m, *expresarlo en el sistema decimal.*

Se escribe la expresión polinómica en base m del número dado y se efectúan en el sistema decimal las operaciones indicadas.

EJEMPLO. — Expresar en el sistema decimal el número $133.353_{(6}$.

$$133.353_{(6} = 1 \cdot 6^5 + 3 \cdot 6^4 + 3 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 + 3 = 12.453$$

Obsérvese que el problema resuelto coincide con el de hallar el valor numérico del polinomio $x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 5x + 3$ para $x = 6$. De ahí que el cálculo se facilite utilizando la regla de Ruffini; es decir, dispondremos así la operación:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 6 & 1 & 3 & 3 & 3 & 5 & 3 \\ & & 6 & 54 & 342 & 2070 & 12450 \\ \hline & 1 & 9 & 57 & 345 & 2075 & \mathbf{12453} \end{array}$$

TERCER PROBLEMA. — *Dado un número en un sistema no decimal, expresarlo en otro sistema no decimal.*

Se comienza pasando el número dado al sistema decimal y luego se pasa al sistema pedido.

EJERCICIO. — Expresar en el sistema de base 6 el número $23404_{(5}$.

17. Observación. — Los múltiplos y submúltiplos de las medidas de longitud, capacidad y peso, siguen las mismas leyes que los números del sistema de numeración decimal; los múltiplos de las medidas de superficie constituyen un sistema de base 100, y las de volumen forman un sistema de base 1.000.

Las medidas de tiempo, angulares y de arcos, forman un sistema de numeración de base 60. En estas últimas no hay más que tres órdenes de unidades: segundos, minutos y grados (o bien horas).

En el sistema de base 100 se necesitarían 99 cifras; en el de base 1.000 habrá 999 cifras, y el sistema de base 60 constará de 59 cifras. En todos ellos se necesita también el *cero*. Ya se comprende que es más fácil enunciar por separado, o en forma de complejo, las unidades de cada orden que seguir el sistema de numeración correspondiente.

EJERCICIOS

Expresar los números siguientes en el sistema de la base que se indica:

4. 14.845, en base 7. **5.** 240.041, en base 12. **6.** 841, en base 3.

Reducir al sistema decimal los números siguientes:

7. $21.012_{(4}$ **8.** $\alpha 101_{(11}$ $(\alpha = 10)$ **9.** $1\alpha\beta 02_{(12}$ $(\alpha = 10$ y $\beta = 11)$.

Reducir los números siguientes al sistema de base que se indica:

10. $10.043_{(6}$, al sistema de base 5.

11. $1\alpha 3_{(11}$ $(\alpha = 10)$ al sistema de base 9.

Reducir a complejos los siguientes números concretos:

12. $8_1470.403$ m²

13. $184_1041.075$ dm³

14. 84.965 segundos

15. 420.041 segundos

Reducir a incomplejos los siguientes números complejos:

16. 85 Km² 3 Hm² 25 Dm² 8 m²

17. 3 Dm³ 45 m³ 125 dm³

18. 30 horas 25 m. 40 s.

19. 45° 20′ 30″

3. Propiedades de la numeración en un sistema de base cualquiera

18. Propiedades fundamentales. — I. *Todo número que sea igual a la base elevada a un exponente entero positivo, se expresa por la unidad seguida de tantos ceros como unidades tenga el exponente.*

En efecto: Si $N = m^k$, siendo m la base del sistema de numeración y k un número entero positivo, el número N se escribirá así:

$$100\overset{(k \text{ ceros})}{\ldots\ldots\ldots\ldots}0$$

pues todos los términos inferiores al hm^k de la expresión [1] (núm. 14), son nulos.

II. *Para multiplicar un número por otro (multiplicador), que sea una potencia de la base, de exponente entero, se añaden, a la derecha del número dado, tantos ceros como unidades tiene el exponente del multiplicador.*

En efecto: Si el número $N = \underline{h}\,\underline{g}\,\underline{f} \ldots \underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a}$, expresado en el sistema de base m, se multiplica por m^p, todos los términos de la expresión [1] (núm. 14), quedan multiplicados por m^p, y su exponente queda aumentado en p unidades, lo cual equivale a correr las cifras correspondientes de la expresión [5] (núm. 15), p lugares a la izquierda. Las cifras de los órdenes p, $p-1$, ... 3, 2, 1, tienen que ser ceros, como puede verse en las siguientes igualdades.

Sea

$$N = \underline{h}\,\underline{g}\,\underline{f} \ldots \underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a} = hm^k + gm^{k-1} + fm^{k-2} + \ldots + cm^2 + bm + a$$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por m^p, obtenemos:

$$Nm^p = hm^{k+p} + gm^{k+p-1} + fm^{k+p-2} + \ldots + cm^{p+2} + bm^{p+1} + am^p + 0 \cdot m^{p-1} + \ldots$$

$$\ldots + 0 \cdot m^2 + 0 \cdot m + 0 = \underline{h}\,\underline{g}\,\underline{f} \ldots \underline{c}\,\underline{b}\,\underline{a}\,\overset{(p \text{ ceros})}{0\ldots\ldots\ldots}0$$

III. *Si un número* N *está expresado en el sistema de base* m, *y tiene* k *cifras, se verifica que*

$$m^{k-1} \leqq N < m^k \qquad [6]$$

y recíprocamente.

Si N tiene k cifras, escrito en forma polinómica equivale a

$$N = gm^{k-1} + fm^{k-2} + \ldots + cm^2 + bm + a$$

debiendo siempre ser $g \geqq 1$. Por consiguiente, $N \geqq m^{k-1}$

Probemos ahora que $N < m^k$. Como $a < m$, la suma de los dos últimos términos será $bm + a < m(b+1) \leqq m^2$. Asimismo, la suma de los tres últimos términos es

$$a + bm + cm^2 < m^2 + cm^2 = m^2(c+1) \leqq m^3$$

Y la suma de los k términos que tiene el número dado N, será

$$N < m^{k-1}(g+1) \leqq m^{k-1+1} = m^k$$

19. Criterios de igualdad y desigualdad. — I. Como dos polinomios enteros en m son idénticos para cualquier valor dado de m, si tienen sus coeficientes respectivamente iguales, teniendo en cuenta la igualdad [1] del número 14, diremos:

Dos números expresados en el sistema de base m *son iguales si tienen sus cifras respectivamente iguales.*

II. *Dos números* N *y* N', *expresados en base* m, *con distinto número de cifras, es menor el que tiene menos cifras.*

Es decir: Si N y N' tienen k y k' cifras, siendo $k' < k$, es $N' < N$.

En efecto: si $k' < k$, será $k' \leqq k - 1$. Sabemos, además, en virtud de [6], que $N' < m^{k'} \leqq m^{k-1}$, y que $m^{k-1} < N$. Luego,

$$N' < m^{k'} \leqq m^{k-1} < N \text{ y, por tanto, } \boldsymbol{N' < N.}$$

III. *La condición necesaria y suficiente para que un número* N' *sea menor que otro* N, *de igual número de cifras, es que la primera cifra de* N' *que sea distinta de su correspondiente de* N, *sea menor que ésta.*

Sean $N' = \underline{f'e'}\ldots\underline{c'b'a'}$ y $N = \underline{fe}\ldots\underline{cba}$ los números dados que tienen k cifras y, además, $f' < f$ por hipótesis; luego, $f' + 1 \leqq f$. Con estas condiciones, podemos establecer las siguientes igualdades y desigualdades:

$$N' = \underline{f'e'}\ldots\underline{c'b'a'} = f'm^{k-1} + \underline{e'}\ldots\underline{c'b'a'} < f'm^{k-1} + m^{k-1} =$$
$$= (f'+1)m^{k-1} \leqq fm^{k-1} < \underline{fe}\ldots\underline{cba} = N.$$

Luego, si $f' < f$, será $N' < N$. Y por igual razón, si $f' > f$, será $N' > N$.

4. Práctica de las cuatro operaciones en un sistema de base cualquiera

20. Adición. — Para facilitar la práctica de la adición en un sistema de base cualquiera, conviene tener presente la tabla de sumar correspondiente a ese sistema; dicha tabla es un cuadro formado por las sumas de cada dos números representados en el sistema por una cifra.

Veamos cómo se construye esta tabla, tomando como ejemplo la de base seis.

TABLA DE SUMAR
en el sistema de base 6

0	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	10
2	3	4	5	10	11
3	4	5	10	11	12
4	5	10	11	12	13
5	10	11	12	13	14

1.° En la primera fila se escribe el cero y los números menores que la base.

2.° En las demás filas se escriben los números que resultan al sumar uno a los números de la fila anterior. En nuestro caso (base seis) hay que tener en cuenta que cada seis unidades forman una unidad de orden superior: $5 + 1 = 10$.

La utilización de la tabla es inmediata. Se lee uno de los números en la primera fila y el otro en la primera columna; la suma se encuentra en la confluencia de las líneas encabezadas por los sumandos.

Entre los casos que pueden presentarse, consideremos el que ofrece alguna dificultad: *suma de varios números cualesquiera.* Sea, por ejemplo, la suma

$$2045_{(6} + 5103_{(6} + 245_{(6}$$

Escribimos los números unos debajo de otros, haciendo que se correspondan en la misma columna las unidades del mismo orden. Si la suma de las cifras de una columna es un número de dos cifras, escribimos solamente la primera de derecha y transportamos la otra a la cabecera de la columna siguiente. Con esto, no hacemos sino aplicar el principio de que n unidades de un orden forman una unidad del orden inmediato superior.

		(1)	(2)	
	2	0	4	$5_{(6}$
+	5	1	0	$3_{(6}$
+		2	4	$5_{(6}$
1	1	4	4	$1_{(6}$

Las cifras entre paréntesis son las transportadas, que conviene se acostumbre a escribir el alumno, pues facilita la comprobación de la operación.

La propiedad asociativa permite fraccionar las sumas de muchos sumandos, efectuando varias sumas parciales y sumando luego los resultados.

21. Sustracción. — Si el minuendo y el sustraendo son números pequeños, la diferencia se halla fácilmente.

Consideremos un ejemplo con *números cualesquiera.* Sea, por ejemplo, efectuar la sustracción

$$5302_{(6} - 431_{(6}$$

Restamos entre sí las unidades simples, las de segundo orden, las de tercer orden, etc. En la segunda columna, como 0 es menor que 3, añadimos a la cifra del minuendo 6 unidades de 2.° orden = 1 unidad de 3.er orden, y decimos: de 3 a 10 van 3; para que la diferencia no varíe añadimos luego una unidad de 3.er orden al sustraendo, diciendo así: llevo una, 4 y 1, 5; de 5 a 13 van 4; llevo una; de 1 a 5, van 4.

5	3	0	$2_{(6}$
−	4	3	1
4	4	3	$1_{(6}$

22. Multiplicación. — Como en la suma, para facilitar la práctica de la multiplicación en un sistema de base cualquiera, conviene tener presente la tabla de multiplicar correspondiente a dicho sistema. Veamos cómo se construye la de base seis, por ejemplo.

1.° En la primera fila se escriben los números 1, 2, ..., $m - 1$, menores que la base.

2.° En la segunda, los duplos de los de la primera fila. En la tercera, los triplos de los de la primera fila, y así sucesivamente hasta la fila $m - 1$.

TABLA DE MULTIPLICAR en el sistema de base 6

1	2	3	4	5
2	4	10	12	14
3	10	13	20	23
4	12	20	24	32
5	14	23	32	41

Su utilización es inmediata. Se lee uno de los números que se quieren multiplicar en la primera fila, y el otro en la primera columna; el producto lo hallaremos en la confluencia de las líneas encabezadas por dichos factores.

Consideremos el caso de la multiplicación que ofrece alguna dificultad: *producto de dos números cualesquiera.* Sea, por ejemplo, la multiplicación $53412_{(6} \times 3054_{(6}$.

Para efectuar la operación se multiplica el multiplicando $53412_{(6}$ por los diversos órdenes de que se compone el multiplicador; es decir, por la suma (3+0+5+4).

$$\begin{array}{r} 53412_{(6} \\ \times\ 3054_{(6} \\ \hline 342452 \\ 440304 \\ 245040 \\ \hline 254225532_{(6} \end{array}$$

El producto 53412 × 4 son unidades de primer orden; el producto 53412 × 5 son unidades de segundo orden; el producto 53412 × 0 es igual a cero, por lo que no se indica, y el producto 53412 × 3 son unidades de cuarto orden. Por la disposición de estos productos parciales, de modo que la primera cifra de la derecha de cada uno caiga debajo de la cifra del multiplicador que la ha originado, indicamos ya el orden de sus unidades. Sólo nos queda sumar dichos productos parciales para obtener el producto total.

23. División. — Efectuemos la siguiente división: $5404_{(6} : 124_{(6}$

$$\begin{array}{r|l} 5404 & 124 \\ -420 & 35 \\ \hline 1204 & \\ -1112 & \\ \hline 52 & \end{array}$$

OPERACIONES AUXILIARES

$540 : 124 = 3$; $\quad 124 \times 3 = 420_{(6}$

$1204 : 124 = 5$; $\quad 124 \times 5 = 1112_{(6}$

PRUEBA

$124 \times 35 = 5312_{(6}$

$5312 + 52 = 5404_{(6}$

Con un poco de práctica y sirviéndose de la correspondiente tabla de multiplicar, no es difícil efectuar la división en un sistema de base cualquiera.

EJERCICIOS

Efectuar las siguientes operaciones:

20. $4.012_{(6} + 1.000_{(6} + 425_{(6}$

21. $5.014_{(6} - 4.321_{(6}$

22. $203_{(6} \times 4_{(6}$

23. $4.031_{(6} \times 12_{(6}$

24. $1.035_{(6} \times 214_{(6}$

25. $12.034_{(6} : 7$

26. $210.435_{(6} : 5$

27. $52.301_{(6} : 205_{(6}$

5. Semejanza

24. Semejanza. — Si en los polígonos $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$ de las figuras 3 y 4 podemos hacer corresponder los puntos A y A', B y B', C y C', D y D', E y E', y entre los segmentos AB y $A'B'$ BC y $B'C'$, CD y $C'D'$, DE y $D'E'$, EA y $E'A'$, podemos establecer la serie de razones iguales

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AD}{A'D'}$$

y son además iguales y del mismo sentido los ángulos ABC y $A'B'C'$, BCD y $B'C'D'$, etc., dichos polígonos son semejantes.

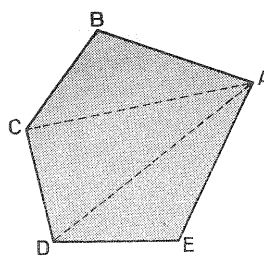


FIG. 3

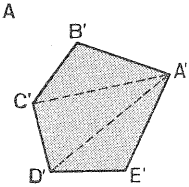


FIG. 4

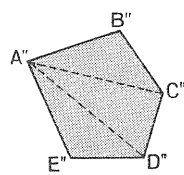


FIG. 5

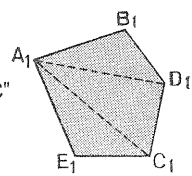


FIG. 6

Observemos que el orden y el sentido en que se han enumerado los vértices, es positivo en ambos (contrario al de las agujas de un reloj).

Si los polígonos $ABCDE$ y $A''B''C''D''E''$ de las figuras 3 y 5 satisfacen las condiciones anteriores, también son semejantes, aunque el sentido de la ordenación sea inverso uno de otro.

Puede suceder que dos polígonos tengan sus lados proporcionales y que sus ángulos no sean respectivamente iguales; por ejemplo, los de las figuras 3 y 6. En estos casos, los tales polígonos no son semejantes.

Más adelante (núm. 35), veremos que a todo punto M de un plano, perteneciente a la figura F (fig. 12), se le puede hacer corresponder otro M', del mismo plano, perteneciente a la figura F', semejante a la F.

Puntos homólogos de dos figuras semejantes son los puntos que se corresponden. Por ejemplo, A y A' (figs. 3 y 4), B y B', C y C', etc.

Segmentos homólogos son los que unen puntos homólogos. Son segmentos homólogos AB y $A'B'$, BC y $B'C'$, etc.

Ángulos homólogos son los determinados por segmentos homólogos. Ejemplo, ABC y $A'B'C'$, BCD y $B'C'D'$, CDE y $C'D'E'$.

Razón de semejanza es el valor común de la razón de dos segmentos homólogos cualesquiera.

25. DEFINICIÓN. — *Semejanza de dos figuras en el plano, es una correspondencia biunívoca entre sus puntos, tal que la razón del segmento determinado por dos puntos cualesquiera pertenecientes a una de ellas, al segmento determinado por los homólogos de aquéllos en la otra, es una cantidad constante, llamada razón de semejanza.*

Limitándonos a figuras rectilíneas, se dice que dos polígonos de igual número de lados son semejantes, cuando tienen los ángulos homólogos iguales y los lados homólogos proporcionales, debiendo añadir que estos elementos homólogos han de estar colocados de la misma manera.

Ahora bien: siendo imposible casi siempre comprobar si esta proporcionalidad existe en todas las líneas, y puesto que una figura queda determinada mediante un cierto número de datos o condiciones, se ha reconocido que puede demostrarse la semejanza (análogamente a lo que sucede con la igualdad), fijando un número de condiciones, que constituyen los llamados *criterios de semejanza.*

26. TEOREMA. — *Toda paralela a uno de los lados de un triángulo, forma con los otros dos un nuevo triángulo semejante al primero.*

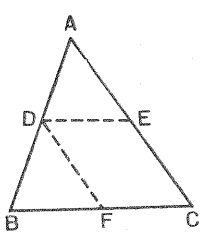


FIG. 7

Sea (fig. 7) un triángulo ABC, en el que trazamos la paralela DE al lado BC. Se ha formado un triángulo ADE, que vamos a demostrar es semejante al ABC. Para ello, hay que probar que dichos triángulos, el ABC y el ADE, tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales.

1.° *Los ángulos son iguales.* En efecto: el ángulo A es común; el ángulo en B y el ángulo en D son iguales por correspondientes, y por la misma razón lo son los ángulos de vértices C y E.

2.° *Los lados son proporcionales.* Por ser DE paralela a BC, en virtud del teorema de Thales, podemos escribir:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{de donde} \quad \frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE} \quad \text{o sea} \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Análogamente, trazando DF paralela a AC, se tiene:

$$\frac{BD}{DA} = \frac{BF}{FC} \quad \text{de donde} \quad \frac{BD + DA}{DA} = \frac{BF + FC}{FC} \quad \text{o sea} \quad \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{FC}$$

Teniendo ahora en cuenta que $FC = DE$, de las proporciones

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad \text{y} \quad \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{FC} \quad \text{se deduce} \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

como se quería demostrar.

27. Triángulos semejantes. — *Dos triángulos son semejantes en los tres casos siguientes:*

1.° *Cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales.*

2.° *Cuando tienen un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales.*

3.° *Cuando tienen sus lados homólogos proporcionales.*

28. PRIMER CASO. — Sean los triángulos ABC y $A'B'C'$ (fig. 8), en que se supone $B = B'$ y $A = A'$.

A partir de A, tomemos un segmento $AD = A'B'$, y tracemos DE paralela a BC. Los triángulos ADE y ABC son semejantes por el teorema anterior. Pero $ADE = A'B'C'$, por tener un lado igual e iguales los ángulos adyacentes; luego, el triángulo $A'B'C'$ es semejante al ABC.

29. SEGUNDO CASO. — Sean los mismos triángulos, en los que se supone

$$A = A' \quad \text{y} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Tomemos como antes $AD = A'B'$, y por D tracemos una paralela al lado BC. Se ha formado el triángulo ADE semejante al ABC, por lo que se verifica:

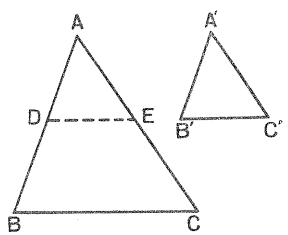


FIG. 8

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Comparando esta proporción con la que tenemos por hipótesis y teniendo además en cuenta que hemos construído $AD = A'B'$, se deduce que $AE = A'C'$. Resulta, por tanto, que los triángulos ADE y $A'B'C'$ tienen iguales los ángulos A y A' y los lados que los forman. Luego, el triángulo $A'B'C'$ es semejante al ABC.

30. TERCER CASO. — Sean los mismos triángulos, y tomemos, como en los dos casos anteriores, $AD = A'B'$. Como entonces, tracemos la paralela DE al lado BC. Siendo ADE semejante a ABC, se verificará:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

pero como, por hipótesis,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

y, por construcción, $AD = A'B'$, los segmentos AE y DE serán respetivamente iguales a $A'C'$ y $B'C'$. Luego, los triángulos ADE y $A'B'C'$ son iguales y, por tanto, $A'B'C'$ y ABC son semejantes.

31. COROLARIOS. — 1.° *Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares.*

2.° *Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando tienen un ángulo agudo igual.*

32. ESCOLIO. — En los triángulos, es condición suficiente para que sean semejantes el que tengan sus lados proporcionales, o que sus ángulos sean respectivamente iguales; pero en los demás polígonos se requieren esas dos condiciones a la vez. Véase, en efecto, cómo los polígonos $ABCD$ y $AB'C'D'$ (fig. 9), aunque tienen los lados paralelos y por consiguiente sus ángulos son respectivamente iguales, es evidente que no son semejantes.

De igual modo, el cuadrilátero $A''B''C''D''$ (fig. 10) y el $ABCD$ (fig. 9), tienen sus lados proporcionales y sin embargo no son semejantes.

Un rectángulo y un cuadrado tienen sus ángulos respectivamente iguales y no son semejantes. Un cuadrado y un rombo siempre tienen sus lados proporcionales y no son semejantes.

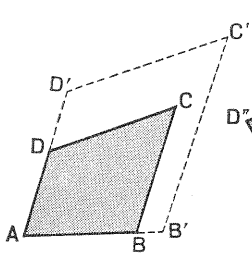


FIG. 9

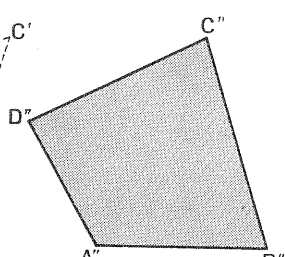


FIG. 10

33. Semejanza de polígonos. — *Dos polígonos* ABCDE *y* A′B′C′D′E′ (figura 11) *son semejantes cuando se puede establecer una correspondencia biunívoca entre sus vértices* (en el caso de la figura, esta correspondencia sería la que asocia los vértices designados con las mismas letras), *tal que los lados y diagonales que unen dos vértices son proporcionales a los que unen los vértices homólogos.*

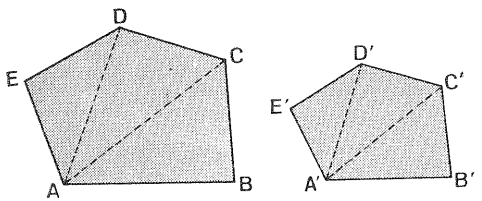


FIG. 11

34. Nótese (fig. 11) que si dos polígonos son semejantes, se pueden descomponer en igual número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos, y recíprocamente. Esta propiedad se suele utilizar como criterio de semejanza de polígonos.

35. Determinación de las semejanzas. — La semejanza, como dijimos, es una correspondencia entre puntos de dos figuras que satisfacen las dos condiciones de la definición de figuras semejantes. Si se nos dan dos segmentos homólogos y una de las figuras F, podemos determinar los homólogos de F', semejante a la F.

Sea $ABCDE$ la figura dada y AB y $A'B'$ los dos segmentos homólogos (fig. 12, *a* y 12, *b*). Trazando las diagonales del polígono $ABCDE$, queda descompuesto en triángulos. La razón de semejanza es $\frac{AB}{A'B'}$ y por tanto, se ha de verificar:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \ldots = \frac{CA}{C'A'}$$

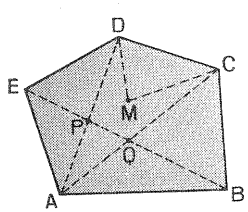


FIG. 12, *a*

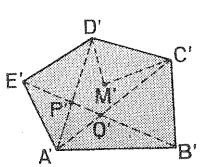


FIG. 12, *b*

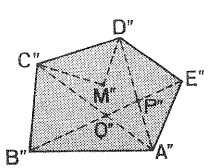


FIG. 12, *c*

Numérica, o gráficamente, podemos hallar los lados y diagonales del polígono semejante al dado, mediante una cuarta proporcional correspondiente a las proporciones que es posible formar con la primera razón de la serie anterior y cada una de las restantes, y, por tanto, se puede construir el polígono.

Como los dos polígonos han de tener iguales sus ángulos homólogos, podemos utilizar esta propiedad en combinación con lo indicado anteriormente, a fin de abreviar el cálculo de lados y diagonales.

Sea M (fig. 12, *a*) un punto cualquiera de la figura dada. Si trazamos los segmentos MD y MC, se obtiene el triángulo DMC. Construyendo sobre $D'C'$ (fig. 12, *b*) un triángulo semejante al DMC, obtenemos el punto M' homólogo del M. Luego, a todo punto M de la figura F le podemos hacer corresponder otro M', homólogo de M en la figura F', semejante a la dada F.

Si el homólogo de AB fuera el $A''B''$ (fig. 12, *c*) se obtendría el polígono $A''B''C''D''E''$, semejante al dado $ABCDE$, por el mismo procedimiento. En este caso la simetría es inversa.

EJERCICIOS

28. Dadas dos figuras semejantes, F_1 y F_2, ¿se puede hacer corresponder cualquier punto de F_1 con cualquiera de F_2?

29. Dados dos triángulos semejantes, T_1 y T_2, trazar en T_1:

1.° Un punto D sobre el lado a, a la distancia $\frac{a}{3}$ del vértice C.

2.° Un punto E situado en el punto medio del lado b.

3.° Un punto F situado en el interior del triángulo.

4.° Un punto G situado fuera del triángulo.

Hállense luego los respectivos puntos homólogos en el triángulo T_2.

30. Trazar un cuadrilátero (no paralelogramo) C_1 y dibujar otro C_2 que sea semejante al primero, y cuya razón de semejanza sea igual a $\frac{2}{3} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}$.

31. Trazar un pentágono cualquiera P_1, de forma apropiada. Dado después el lado A_2B_2 de otro pentágono semejante al primero, construir P_2. ¿Cuántas soluciones hay?

32. Decir si son semejantes: 1.°, todos los triángulos equiláteros; 2.°, todos los cuadrados; 3.°, todos los polígonos regulares del mismo nombre; 4.°, todas las circunferencias; 5.°, todos los paralelogramos rectángulos.

33. Construir un polígono semejante a otro dado, sabiendo que la razón de semejanza es: 1.°, $k = \frac{3}{4}$; 2.°, $k = \frac{5}{4}$.

6. Homotecia

36. En las figuras 13 y 14, vemos que los polígonos $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$ se corresponden punto a punto. Los segmentos OC' y OC, OD' y OD, etc., se han tomado de forma que sean iguales las razones $\frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD} = \ldots = k$, en los polígonos de la figura 13, y a $-k$ en los de la figura 14, pues los segmentos OC' y OC, OD' y OD, etc., son en esta figura de sentido contrario.

Observemos por otra parte que las rectas que unen puntos correspondientes, C y C', D y D', etc., concurren todas en el centro O. Las figuras que tienen estas propiedades se llaman *homotéticas*.

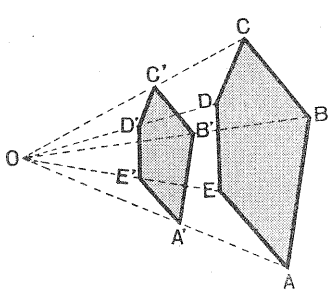


FIG. 13

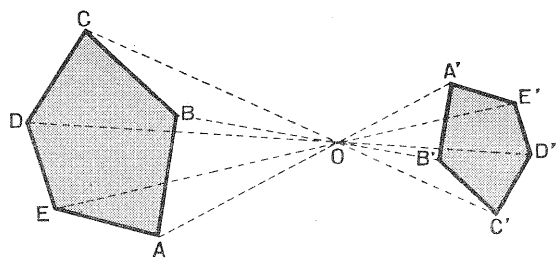


FIG. 14

37. DEFINICIÓN. — *Dos figuras son homotéticas, con respecto a un centro* O, *si las rectas que unen puntos correspondientes (u homólogos), pasan por dicho centro, y son iguales las razones de los segmentos determinados en cada recta por el centro y los puntos correspondientes, o sea, si*

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \ldots = \pm k$$

El punto O se llama *centro de homotecia*, y la razón constante k, *razón de homotecia*.

El segmento que une dos puntos pertenecientes a una de dos figuras homotéticas, es *homólogo* del que une los correspondientes en la otra. Así, el segmento CD es homólogo del $C'D'$, y el AB lo es del $A'B'$.

38. TEOREMA. — *Las figuras homotéticas son semejantes y en ellas los segmentos homólogos son paralelos.*

En efecto: los triángulos $C'OD'$ y COD, $D'OE'$ y DOE, etc. (figuras 13 y 14), son semejantes por tener un ángulo común y dos lados proporcionales; además, por el teorema de Thales, $C'D'$ es paralelo a CD, $D'E'$ es paralelo a DE, etc. Por tanto, dichos polígonos tienen sus lados proporcionales y sus ángulos respectivamente iguales por ser ángulos de lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido, o en sentido opuesto. Las figuras $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$ son, pues, semejantes.

Supongamos que las repetidas figuras $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$, no estén en el mismo plano, o sea que son dos polígonos situados en planos paralelos. Entonces, las rectas OC, OD, etc., juntamente con los polígonos, determinan dos pirámides. También en esta posición dichos polígonos serían homotéticos (en el espacio), pues satisfacen las condiciones de las figuras homotéticas.

39. Homotecia entre dos circunferencias. — *Dos circunferencias cualesquiera situadas en el mismo plano son homotéticas.*

Tracemos (figuras 15 y 16) la línea de los centros OO' y dos radios paralelos r y r'. Uniendo luego A con A', se obtiene H_1, que es un centro de homotecia, y uniendo A con A'' hallamos H_2, que es otro centro de homotecia.

La razón de homotecia para H_1, es $$\frac{H_1O}{H_1O'} = \frac{H_1A}{H_1A'} = +\frac{r}{r'}$$

La razón de homotecia para H_2, es $$\frac{H_2O}{H_2O'} = \frac{H_2A}{H_2A''} = -\frac{r}{r'}$$

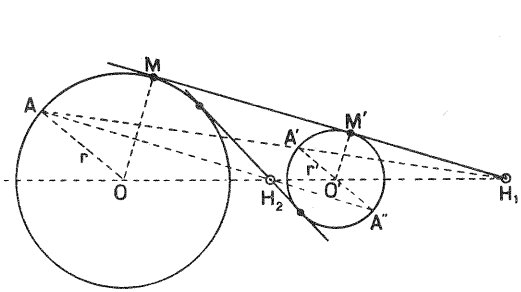


FIG. 15

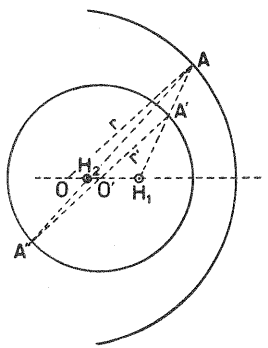


FIG. 16

En la figura 15 podemos ver que los centros de homotecia H_1 y H_2 son los puntos de intersección de las tangentes exteriores e interiores, respectivamente.

40. Propiedades de las figuras homotéticas. — Los elementos que se corresponden a sí mismos se llaman *elementos dobles*. El centro de homotecia es un punto doble; las rectas que pasan por el centro de homotecia, también son rectas dobles.

Las rectas homólogas que no pasan por el centro, son paralelas. Los segmentos homólogos son proporcionales. Los ángulos homólogos son iguales. Si una serie de puntos de una figura se hallan en un determinado orden de sucesión, los homólogos de la otra se hallarán también en ese mismo orden de sucesión.

En las transformaciones de una figura por homotecia, con respecto a un centro, permanecen invariables: el centro de homotecia, los ángulos, el paralelismo de las rectas homólogas, y las rectas dobles.

Estas propiedades se conservan en las figuras homotéticas en el espacio.

EJERCICIOS

34. Dibujar un cuadrilátero $ABCD$ y construir sus homotéticos $A'B'C'D'$ y $A''B''C''D''$, tales que sus respectivas razones de homotecia sean:

a) $\frac{3}{4} = \frac{OA'}{OA}$; *b)* $\frac{5}{3} = \frac{OA'}{OA}$; *c)* $-\frac{3}{4} = \frac{OA''}{OA}$; *d)* $-\frac{5}{3} = \frac{OA''}{OA}$.

Las construcciones *a)* y *c)* se pueden hacer en una sola figura, y las *b)* y *d)* en otra.

35. Demostrar que la razón de homotecia es igual a la razón de semejanza de dos figuras homotéticas.

36. Decir si dos polígonos regulares dados pueden ser homotéticos. Si es posible, hallar gráfica y numéricamente el centro de homotecia.

37. ¿Qué punto es el centro de homotecia de dos circunferencias tangentes?

38. Hallar el centro de homotecia de dos circunferencias dadas: *a)* exteriores; *b)* interiores; *c)* secantes.

39. Dada una circunferencia de 3 cm. de radio, trazar las circunferencias homotéticas de la dada, sabiendo que el centro de homotecia dista 2 cm. de su centro, y que las razones de homotecia son: *a)* $\frac{2}{3}$; *b)* $\frac{4}{3}$; *c)* $-\frac{2}{3}$; *d)* $-\frac{4}{3}$.

40. Hacer con 4 varillas de alambre (no muy grueso, pero tampoco demasiado delgado), una radiación de rectas que pasen por un punto. Estos alambres se pueden sujetar en dicho punto con pastelina, o como parezca mejor. Con este modelo, construir polígonos, o poliedros homotéticos con respecto a dicho punto.

7. Simetría

41. SIMETRÍA CENTRAL. — Dado el triángulo ABC (fig. 17) y el centro O, tracemos las rectas AO, BO y CO. A partir del centro O, tomemos sobre las prolongaciones de dichas rectas $OA' = OA$, $OB' = OB$ y $OC' = OC$ y tracemos los segmentos $A'B'$, $B'C'$ y $C'A'$. Se obtiene así el triángulo $A'B'C'$, simétrico del ABC.

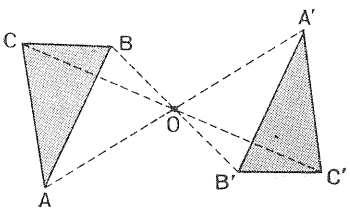


FIG. 17

Los segmentos homólogos son AB y $A'B'$, BC y $B'C'$, CA y $C'A'$, OA y OA', OB y OB', etc. Ecribiremos las razones:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \ldots = \frac{OA}{OA'} = \ldots = -1$$

pues $OA = -OA'$ por ser estos segmentos de sentido opuesto.

DEFINICIÓN. — *Dos figuras son simétricas con respecto a un punto* O *llamado centro de simetría, si éste es el punto medio del segmento que une cada par de puntos correspondientes u homólogos.*

Hay figuras que tienen sus puntos de tal forma que cada uno de ellos tiene su simétrico con respecto a un punto interior, en la misma figura. *Ejemplos:* la superficie esférica, el cubo, los poliedros regulares, los paralelepípedos, etcétera.

Se dice de un punto que es centro de simetría de una figura, si todos los segmentos que pasan por él y tienen sus extremos en dicha figura, quedan divididos en dos partes iguales.

En dos figuras simétricas cualesquiera (respecto a un centro, respecto a un eje, o respecto a un plano), se llaman *elementos dobles,* aquellos que son simétricos de sí mismos.

42. Con el modelo de que se habla en el ejercicio 40 de la lección anterior, constrúyanse: 1.°, dos cuadriláteros planos, no regulares y que sean simétricos; 2.°, dos pirámides de base tetragonal, cuyo vértice esté más alejado del centro que la base; 3.°, dos tetraedros simétricos.

Determinados los puntos simétricos sobre las varillas, se pueden construir en cartulina dichas figuras, para ver mejor si son superponibles.

Los cuadriláteros son superponibles, pero se observará que los vértices de uno de ellos se han tenido que girar 180°, comparando su posición con la que tenía en el modelo. Los tetraedros y pirámides no son superponibles, a no ser que tengan algunos diedros iguales entre sí (en la misma pirámide).

Los poliedros simétricos con respecto a un centro, no son superponibles más que en algunos casos especiales.

43. Triedros simétricos. — *Son los que tienen el vértice común, y las aristas del uno son la prolongación de las aristas del otro* (fig. 18).

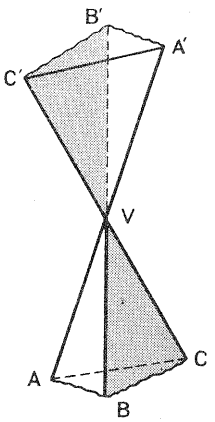


FIG. 18

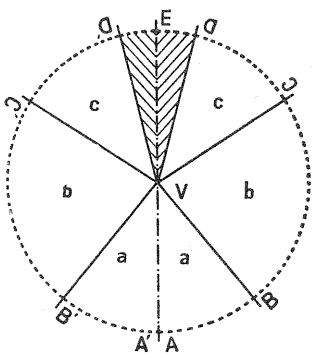


FIG. 19

CONSTRUCCIÓN DE TRIEDROS SIMÉTRICOS. — En una cartulina, tracemos una recta VE (figura 19). Construyamos luego en el semiplano de derecha los ángulos $AVB = \hat{a}$, $BVC = \hat{b}$ y $CVD = \hat{c}$; de igual modo en el semiplano de izquierda dibujemos los ángulos $AVB' = \hat{a}$, $B'VC' = \hat{b}$ y $C'VD' = \hat{c}$. Cortemos la figura por la recta VE, y, doblando la cartulina por los lados de los ángulos, quedarán construídos los dos triedros, los cuales se podrán colocar en forma de figuras simétricas con centro en V. Es fácil probar que dichos triedros no son superponibles. Lo serían, únicamente en el caso particular de ser $\hat{a} = \hat{b}$.

44. Propiedades de las figuras simétricas con respecto a un centro. — Las figuras simétricas con respecto a un centro, tienen las propiedades de las figuras homotéticas.

Las figuras planas simétricas con respecto a un centro, son superponibles por un giro de 180° alrededor del centro de simetría.

En figuras simétricas respecto a un centro, el único *punto doble* es el mismo centro; *rectas dobles,* son todas las que pasan por el centro, y *planos dobles,* los que pasan por el mismo centro.

45. SIMETRÍA AXIAL. — Construyamos el modelo de la figura 20. El eje EE' es una varilla, que puede ser de alambre suficientemente grueso para que no se deforme fácilmente. Los cubos 1, 2 y 3 representan tres corchos atravesados por el eje en su centro. Las otras tres varillas son perpendiculares al eje. En cada una hay dos corchos A y A', B y B', y C y C'. Los de la misma varilla están a igual distancia del eje. Los puntos A y A' son simétricos entre sí respecto al eje EE'. También lo son B y B', y C y C'.

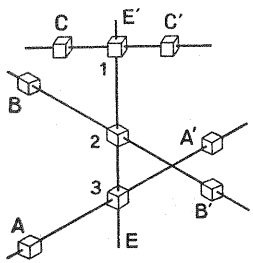


FIG. 20

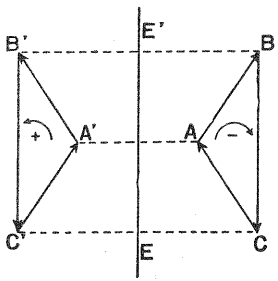


FIG. 21

La figura obtenida al unir los puntos A, B y C, es simétrica de la formada al unir A', B' y C'.

Valiéndose de este modelo se pueden construir poliedros simétricos.

Si se toma otro punto A_2 sobre la varilla AA' y se halla su simétrico A'_2, la figura $A_2(ABC)$ sería un tetraedro simétrico del $A'_2(A'B'C')$.

Tomando otros dos puntos en cada varilla, y uniéndolos de forma conveniente, podemos construir muchos poliedros simétricos.

Si suponemos fija una de las figuras, la ABC por ejemplo, y a la otra, $A'B'C'$, la hacemos girar 180° alrededor del eje EE', veríamos cómo las dos quedan superpuestas.

Si los puntos de las citadas figuras estuvieran en un plano (fig. 21), también se superpondrían por un giro de 180°, y se conservarían las demás propiedades indicadas.

DEFINICIÓN. — *Dos figuras son simétricas respecto de un eje, si éste es la mediatriz de los segmentos que unen puntos correspondientes u homólogos de dichas figuras.*

46. Propiedades de las figuras simétricas con respecto a un eje.

1.ª Se conserva en ellas la igualdad de los ángulos y segmentos homólogos.

2.ª Son siempre superponibles.

3.ª En figuras simétricas respecto a un eje, son *puntos dobles* todos los del eje; *rectas dobles,* el eje y todas las perpendiculares al eje situadas en un mismo plano con él; *planos dobles,* todos los que pasan por el mismo eje y todos los perpendiculares a él.

47. Eje de simetría. — En todo prisma regular hay varias rectas que son ejes de simetría de la figura. Así, en la figura 22, $E_4E'_4$ es un eje de simetría, pues vemos que el simétrico del punto A con respecto a dicha recta, es C, el de B es D; y todo punto del cuadrado $ABCD$ tiene su simétrico en el mismo cuadrado. La misma propiedad tienen los demás puntos de la superficie lateral del prisma.

La recta $L_2L'_2$, mediatriz de las aristas AA' y CC', también es otro eje de simetría. En efecto: el simétrico del punto A es A', el de C es C', el de O es O', etc.

Las demás rectas terminadas en flecha, son asimismo ejes de simetría, pues son mediatrices de las aristas, laterales, o perpendiculares a las caras en su centro de simetría.

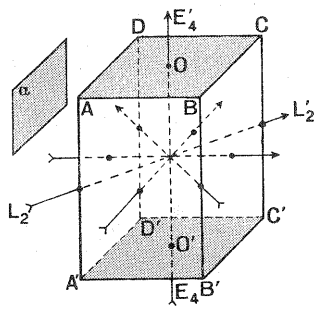


FIG. 22

El eje $E_4E'_4$ es *cuaternario,* ya que, si el prisma gira alrededor del eje un ángulo de 360°, ocupa *cuatro* posiciones idénticas frente a un plano α, paralelo a él. Los demás ejes son *binarios,* pues si colocamos el plano α paralelo a las bases y giramos el prisma alrededor de ellas un ángulo de 360°, se verá que, en todo este giro, solamente hay dos posiciones en las cuales las bases son paralelas al plano α.

Es conveniente que el alumno construya en cartulina el prisma de la figura 22 y, con un alambre o palillos como ejes, compruebe lo indicado anteriormente.

Los demás prismas de un número par, $2n$, de caras laterales, tienen n ejes binarios de simetría que van al punto medio de las aristas laterales, n ejes binarios que van al punto medio de las caras laterales y, además, el eje de simetría superior (eje cuaternario), perpendicular a las bases.

DEFINICIÓN. — *Una recta es eje de simetría de una figura, cuando cada punto de la figura tiene su simétrico con respecto a dicha recta, en la misma figura.*

48. SIMETRÍA CON RESPECTO A UN PLANO. — Construyamos el siguiente modelo. Sobre una lámina delgada de corcho se clavan tres varillas perpendiculares a su superficie. Sobre cada varilla, y a distancias iguales del corcho, se señalan los

puntos A y A', B y B', C y C' (fig. 23). Cada punto es simétrico, respecto del plano, con su correspondiente de la misma varilla. El triángulo ABC es simétrico del $A'B'C'$ con respecto al plano α.

Si se señalan otros dos puntos simétricos, el C_2 y C'_2, y se unen con un hilo a los otros tres, resultan dos tetraedros simétricos con respecto al plano α. Los segmentos AB, BC, CA, etc., son homólogos, respectivamente, de $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$, etc. Se puede observar que los segmentos homólogos son iguales. La razón de semejanza es -1, pues están orientados en sentido contrario. En efecto: un observador colocado de pie, en la parte superior del plano, vería que el sentido del giro $ABCA$ es contrario al del giro $A'B'C'A'$.

DEFINICIÓN. — *Dos figuras son simétricas con respecto a un plano, cuando éste es perpendicular en su punto medio al segmento que une dos puntos correspondientes de dichas figuras.*

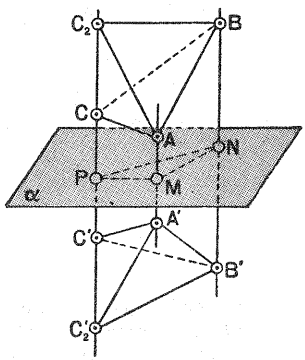


FIG. 23

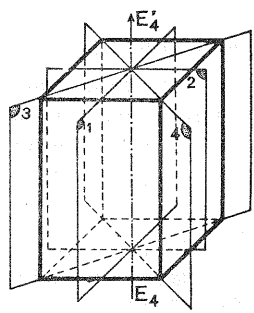


FIG. 24

49. Plano de simetría. — Imaginemos un prisma cuadrangular regular (fig. 24). Tracemos los planos que pasan por dos aristas laterales opuestas. Estos planos dividen al prisma en dos partes simétricas, pues cualquier recta perpendicular a dichos planos, queda dividida por el plano y la superficie del prisma en dos partes iguales. Los planos perpendiculares a las aristas básicas en su punto medio, también son planos de simetría.

Plano de simetría de una figura es el plano que divide a la figura en dos partes simétricas.

50. Propiedades. — 1.ª Dos figuras simétricas con respecto a un plano, tienen iguales todos sus elementos homólogos: lados, caras y ángulos, etcétera.

2.ª A toda alineación de puntos en una de las figuras, corresponde una alineación de sentido opuesto en la otra.

3.ª Los poliedros simétricos con respecto a un plano, no son, generalmente, superponibles.

4.ª En figuras simétricas respecto a un plano, son *puntos dobles* todos los situados en el plano de simetría; *rectas dobles,* todas las situadas en el plano y todas las perpendiculares a él, y *planos dobles,* el plano de simetría y los perpendiculares a él.

EJERCICIOS

41. Trazar un triángulo y dibujar su simétrico: 1.º, con respecto a un punto interior; 2.º, con respecto a un punto del contorno que no sea un vértice; 3.º, con respecto a un punto exterior; 4.º, con respecto a una altura; 5.º, con respecto a una mediana.

Cada ejercicio se hará en figura separada y utilizando el mismo triángulo. La figura simétrica de la dada, se trazará con líneas de puntos o de color.

42. Decir si los polígonos regulares tienen centro y eje de simetría.

43. ¿Cuántos ejes de simetría tiene un polígono regular de n lados?

44. ¿Cuántos centros y ejes de simetría tiene una circunferencia?

45. ¿Cuántos centros, ejes y planos de simetría tiene una esfera?

46. Decir si son equivalentes las dos proposiciones siguientes: *a)* Dos figuras son simétricas con respecto a un centro, eje o plano de simetría; *b)* Una figura tiene centro, eje o plano de simetría.

47. ¿Qué clase de ejes de simetría tiene un cubo? ¿Cuántos ejes tiene en total? ¿Cuántos planos de simetría? Construir dicho cuerpo.

48. Decir si en un paralelepípedo oblicuo, romboedro, hay centro, ejes o planos de simetría.

49. ¿Cuántos centros, ejes y planos de simetría tiene un prisma hexagonal regular?

50. Ídem una pirámide hexagonal regular.

51. ¿Cuántos centros, ejes y planos de simetría tiene una bipirámide hexagonal regular?

LECCIÓN COMPLEMENTARIA

Potencia de un punto respecto de una circunferencia. Eje y centro radical

51. Potencia de un punto respecto de una circunferencia. — Recordemos que *dados una circunferencia y un punto, se llama potencia del punto con respecto a la circunferencia, al valor constante de los productos de los dos segmentos que determina la circunferencia sobre cualquier secante que pase por el punto, contados a partir del punto dado.*

Como es igual al producto de dos segmentos, la potencia de un punto respecto de una circunferencia se expresará en unidades de superficie. Para representar la potencia del punto P, pondremos:

$$\text{Pot. } (P) = PA \times PB$$

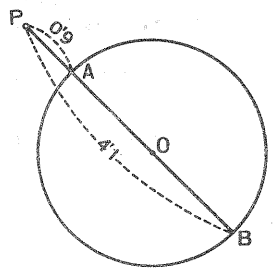


FIG. 25

EJEMPLO. — En la figura 25, si el segmento PA mide 0'9 cm. y el PB vale 4'1 cm., la potencia del punto P respecto de la circunferencia O, será:

$$\text{Pot. } (P) = 0'9 \times 4'1 = 3'69 \text{ cm}^2$$

El punto P puede estar en la circunferencia, en cuyo caso uno de los factores de su potencia es nulo, por lo que el producto será igual a cero. Expresamos esto, diciendo que *la potencia de cualquier punto de la circunferencia, respecto de la misma, es cero.*

52. Diversas expresiones de la potencia. — Vamos a expresar la potencia de un punto, en función de su distancia al centro de la circunferencia y del radio de ésta.

1) Si el punto P es exterior (fig. 26, *a*), tendremos:

$$\text{Pot. } (P) = PA \times PB = (d-r)(d+r) = d^2 - r^2$$

2) Cuando el punto P sea interior (fig. 26, *b*), será:

$$\text{Pot. } (P) = PA \times PB = (r-d)(r+d) = r^2 - d^2$$

Pero si admitimos que la potencia de un punto interior es *negativa*, por tener sentido contrario los dos segmentos que se multiplican, la potencia es

$$\text{Pot. } (P) = -(PA \times PB) = -[(r-d)(r+d)] = -(r^2-d^2) = d^2 - r^2$$

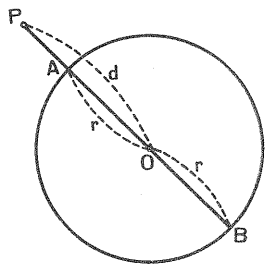


FIG. 26, *a*

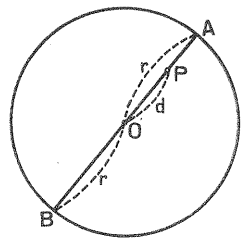


FIG. 26, *b*

3) Si el punto P está en la circunferencia, la potencia será

$$\text{Pot. } (P) = d^2 - r^2 = r^2 - r^2 = 0$$

En los tres casos, la expresión de la potencia es la misma:

$$\boxed{\text{Pot. } (P) = d^2 - r^2}$$

Es decir: *la potencia de un punto respecto de una circunferencia es igual a la diferencia entre el cuadrado de su distancia al centro de la circunferencia y el cuadrado del radio.*

Si el punto P es exterior, trazando la tangente PT (fig. 27) encontramos una nueva expresión de la potencia.

En efecto: Consideremos, además de la tangente PT una secante cualquiera PB, y unamos el punto de tangencia T con las intersecciones A y B. Se han formado así los triángulos APT y PTB, de cuya semejanza (áng. P común y ángulo PTA = áng. B), obtenemos

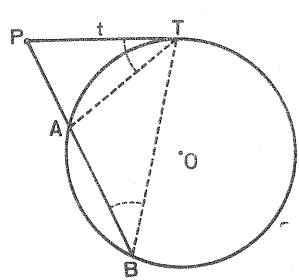


FIG. 27

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} \quad \text{o sea,} \quad \overline{PT}^2 = PA \times PB$$

Como el producto $PA \times PB$ es la potencia del punto P, podremos escribir:

$$\text{Pot. } (P) = \overline{PT}^2 = t^2$$

Luego, *la potencia de un punto exterior a una circunferencia, es igual al cuadrado del segmento de la tangente a la circunferencia, comprendido entre dicho punto y el de contacto.*

Al segmento t se le conoce por *longitud de la tangente.*

53. Eje radical de dos circunferencias. — *Es el lugar geométrico de los puntos que tienen igual potencia respecto de esas circunferencias.*

Sea P un punto del eje radical (fig. 28, *a*) y r y r' los radios de las circunferencias. Si d y d' son las distancias del punto P a los centros O y O', se verificará que

$$d^2 - r^2 = d'^2 - r'^2, \quad \text{de donde,} \quad d^2 - d'^2 = r^2 - r'^2$$

lo cual indica que el eje radical es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de cuadrados a dos puntos fijos es constante.

De aquí se deduce que *el eje radical de dos circunferencias es una perpendicular a la recta que une sus centros.*

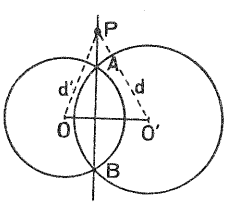


FIG. 28 *a*

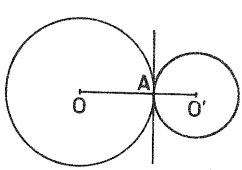


FIG. 28, *b*

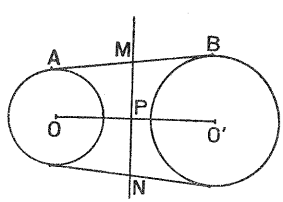


FIG. 28, *c*

54. Determinación del eje radical. — Hay que considerar tres casos:

1.° *Si las circunferencias son secantes* (fig. 28, *a*), *su eje radical es la secante común,* ya que los dos puntos de intersección tienen potencia nula respecto de las dos circunferencias.

2.° *Si las circunferencias son tangentes* (fig. 28, *b*), *la perpendicular a la línea de los centros, trazada por el punto de contacto, es decir, la tangente común, es el eje radical.* En efecto: cualquier punto de dicha tangente

tiene por potencia, respecto de las dos circunferencias, el cuadrado de la distancia del punto al de contacto.

3.° *Si las circunferencias son exteriores* (fig. 28, *c*), *el eje radical es la recta que une los puntos medios de las tangentes comunes a las dos circunferencias.* En efecto: desde esos dos puntos, las tangentes a las dos circunferencias son iguales y, por consiguiente también lo será la potencia respecto de las mismas.

55. Centro radical de tres circunferencias. — Supongamos tres circunferencias cuyos centros O, O' y O'' no estén en línea recta (fig. 29). Las circunferencias O y O' tienen por eje radical la recta e y las O y O'', la recta e''. Ambas rectas e y e'' se cortarán en un punto P, pues son perpendiculares a dos rectas OO' y OO'' que a su vez se cortan. Por consiguiente, dicho punto P tiene igual potencia respecto de las tres circunferencias, por lo que ha de pertenecer también al eje radical de O' y O''.

Se llama centro radical de tres circunferencias al punto en que concurren los tres ejes radicales que determinan las tres circunferencias, tomadas dos a dos.

Desde el centro radical se pueden trazar seis tangentes iguales, dos a cada circunferencia.

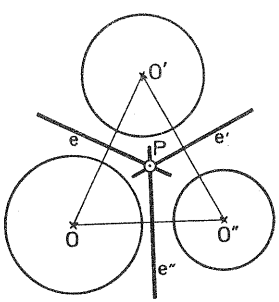


FIG. 29

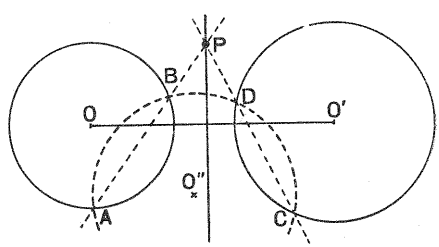


FIG. 30

APLICACIÓN. — El centro radical nos proporciona un procedimiento rápido para hallar el eje radical de dos circunferencias. Sean las circunferencias O y O' (fig. 30). Como el eje radical ha de ser perpendicular a la recta OO', bastará determinar uno de sus puntos, y luego desde él se traza dicha perpendicular.

Para hallar ese punto, se traza una tercera circunferencia O'' que corte a las dadas. Las cuerdas comunes AB y CD concurren en P, que será el centro de las tres circunferencias, y por tanto, pasará por él el eje radical que se busca. No queda sino trazar desde P la perpendicular al segmento OO'.

EJERCICIOS

52. Desde un punto exterior a una circunferencia se traza una tangente y una secante pasando por el centro. Calcular la longitud de la tangente si la parte exterior de la secante es igual al diámetro de la circunferencia de 3 cm. de radio.

53. Por un punto situado a 8 cm. del centro de una circunferencia se traza una secante cuya parte externa mide 4 cm., y la cuerda, 3 cm. Calcular el radio de dicha circunferencia y la longitud de la tangente trazada desde dicho punto a la circunferencia.

54. En una circunferencia de 7 cm. de radio se traza un punto situado a 2 cm. del centro. Por este punto se traza una cuerda cuyos segmentos están en la relación 4/5. Calcular los segmentos de dicha cuerda.

55. Calcular la potencia del punto P, en los dos ejercicios anteriores.

56. Trazar el eje radical de dos circunferencias en las posiciones que pueden tener en un plano: exteriores, secantes, etc.

57. Dado un punto P y los pares de puntos A, A' y B, B' alineados (cada par) con P, demostrar que dichos puntos pertenecen a una circunferencia si se cumple que $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$.

58. Hallar el centro radical de tres circunferencias: 1.º, secantes; 2.º, tangentes; 3.º, de tres circunferencias desiguales cuyos centros están en línea recta; 4.º, tres circunferencias iguales cuyos centros están en línea recta.

59. Dada una circunferencia de 15 dm. de radio y un punto P a 39 dm. de distancia de su centro O, ¿cuál será la medida de la tangente trazada a esa circunferencia por el punto P y limitada por el punto de contacto?

60. El eje radical de dos circunferencias dista 2'25 m. del centro de la menor, y un punto de él dista 5 y 4 m., respectivamente, de los centros de la mayor y menor. ¿Qué longitud tiene la línea de los centros?

8. Métodos de resolución de problemas

56. Qué es un problema. — *Problema* es una cuestión de carácter práctico, constituída por un conjunto de proposiciones que expresan las relaciones existentes entre una o más cantidades o elementos conocidos, denominados *datos*, y otros elementos desconocidos *(incógnitas)*, que se trata de averiguar.

57. Su resolución: partes de que consta. — La resolución de un problema consiste en hallar los elementos desconocidos o incógnitas.

Si se trata de problemas NUMÉRICOS, la resolución comprende estas tres partes:

1.ª *Planteo del problema*, es decir, la expresión en lenguaje matemático de las relaciones que ligan los datos con las incógnitas.

2.ª *Resolución de las ecuaciones* o *cálculo de las operaciones que se han de efectuar.*

3.ª *Examen o interpretación de los valores obtenidos.* Estos valores, si convienen al problema, constituyen su *solución.* Un problema puede ser: *indeterminado*, cuando tiene infinitas soluciones; *imposible*, si no tiene ninguna, o *determinado*, cuando tiene un número finito de ellas.

En los problemas llamados GENERALES o *literales*, cuyos datos van expresados por letras, el examen o interpretación de los valores obtenidos, se denomina *discusión.* Consiste ésta en establecer las condiciones que han de cumplir los datos para que el problema sea posible, y examinar qué resultados se obtienen para los distintos valores que pueden tomar los datos.

Finalmente, la resolución de problemas GRÁFICOS o *de construcción*, comprende el *análisis*, la *construcción* y la *discusión.*

El *análisis* se practica, de ordinario, trazando una figura o boceto de igual naturaleza que la buscada y considerando en ella los elementos correspondientes a los datos. De esta figura se deducen otras: sea trazando líneas auxiliares, prolongando lados, por simetría, semejanza, etc. Así, hasta conseguir que el problema quede reducido a otro cuya solución conocemos.

La *construcción* reproduce el proceso del análisis, pero, ahora, partiendo de las dimensiones de los datos, y no sobre figuras de cualquier tamaño, como se hizo en el análisis.

La *discusión* determina el número de soluciones que puede haber según la naturaleza y disposición de los datos.

58. El método reductivo en general. — Los procedimientos empleados en la resolución de problemas, se basan generalmente en el llamado método *reductivo* o *analítico.*

Consiste en *reducir* el problema propuesto a otro, éste a un tercero, y así sucesivamente hasta llegar a uno conocido o que se resuelva inmediatamente. Siguiendo luego un camino inverso al primero, llegaremos a la solución pedida por el problema.

Al razonamiento reductivo suele llamársele *análisis* del problema, por lo cual, el método reductivo recibe ordinariamente el nombre de *analítico.*

La aplicación del método reductivo supone, naturalmente, el conocimiento previo de teoremas, fórmulas, reglas operatorias, etc.

59. Problemas aritméticos, algebraicos y geométricos. — Problemas *aritméticos* son los que versan sobre cuestiones de Aritmética. Como regla general, el secreto para la resolución de los problemas aritméticos, está en comprender cuál es la operación u operaciones aritméticas que relacionan la incógnita con los datos. Según sean estas relaciones, se obtendrá la solución con simples sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, o será preciso establecer además proporciones entre los datos y la incógnita, acudiendo a la llamada *regla de tres.*

Problemas *algebraicos* son aquellos que se resuelven mediante una o más ecuaciones. Muchos problemas de Aritmética se resuelven más fácilmente por procedimientos algebraicos.

Los problemas *geométricos* tratan de las relaciones entre los elementos de las figuras geométricas, o de éstas entre sí. Pueden ser *numéricos* o *gráficos.* La resolución de los primeros depende de la Aritmética o del Álgebra; en ellos se nos dan los valores numéricos de ciertos datos y nos piden los de otros. Los gráficos tienen por objeto la construcción de figuras, dando los elementos suficientes para determinarlas; se resuelven valiéndose de la regla, la escuadra, el compás y demás instrumentos apropiados.

60. Ejemplos. — Presentamos a continuación algunos ejemplos sencillos de problemas aritméticos, o algebraicos, en cuya resolución se emplea el método reductivo.

En las lecciones siguientes se volverá a utilizar este método, junto con otros especiales, en la resolución de problemas gráficos de Geometría.

PROBLEMA 1.° — *Un comerciante compró 250 metros de tela por 18.750 pesetas. Se inutilizaron 4 metros y vendió primero los $\frac{2}{3}$ de los que quedaron, ganando 17 ptas. por metro, y luego el resto, con una pérdida del 5 % sobre el precio de compra. ¿Qué beneficio obtuvo?*

DATOS

Tela adquirida: 250 metros.
Valor de compra: 18.750 ptas.
Tela inutilizada: 4 metros.

Primera venta { $\frac{2}{3}$ de la tela útil. / ganancia: 17 ptas. por m.

Segunda venta { $\frac{1}{3}$ de la tela útil. / pérdida: 5 % sobre precio de compra

INCÓGNITA

Beneficio obtenido.

PLANTEO o RAZONAMIENTO (método *reductivo)*

1) *Beneficio obtenido* = Valor de venta − valor de compra.
2) *Valor de venta* = Valor de la 1.ª venta + valor de la 2.ª venta.
3) *Valor de la 1.ª venta* = Precio 1.ª venta × metros vendidos.
4) *Precio de la 1.ª venta* = Precio de compra + 17 ptas.
5) *Tela vendida primeramente* = $\frac{2}{3}$ de 246 metros.
6) *Valor de la 2.ª venta* = Precio 2.ª venta × metros vendidos.
7) *Precio de la 2.ª venta* = Precio de compra × $\frac{95}{100}$.
8) *Tela vendida la 2.ª vez* = $\frac{1}{3}$ de 246 metros.
9) *Precio de compra* = Valor de compra dividido por longitud de la tela.

RESOLUCIÓN

Hallaremos la solución procediendo en orden inverso al seguido en el razonamiento (núm. 58):

9) Precio de compra = 18.750 ptas : 250 = 75 ptas.
8) Tela vendida la 2.ª vez = $\frac{1}{3}$ de 246 m. = 82 metros.
7) Precio de la 2.ª venta = 75 ptas. × $\frac{95}{100}$ = 71'25 ptas.
6) Valor de la 2.ª venta = 71'25 ptas. × 82 = 5.842'50 ptas.
5) Tela vendida primeramente = $\frac{2}{3}$ de 246 m. = 164 metros.
4) Precio de la 1.ª venta = 75 ptas. + 17 ptas. = 92 ptas.
3) Valor de la 1.ª venta = 92 ptas. × 164 = 15.088 ptas.
2) Valor de venta = 15.088 ptas. + 5.842'50 ptas. = 20.930'50 ptas.
1) Beneficio obtenido = 20.930'50 ptas. − 18.750 ptas. = 2.180'50 ptas.

SOLUCIÓN: 2.180'50 ptas.

PROBLEMA 2.° — *Los obreros de una fábrica están clasificados en tres grupos, de los cuales el primero comprende 9 obreros más que el segundo y 17 más que el tercero. Los del primer grupo cobran un jornal de 74 pesetas; los del segundo, 69'50, y los del tercero, 65 ptas. Sabiendo que entre todos reciben 5.984 ptas., averiguar cuántos obreros son.*

PLANTEO ARITMÉTICO Y RESOLUCIÓN

Supongamos que los tres grupos fueran de igual número de obreros, con lo que el problema se habrá *reducido* a otro más sencillo.

Para hacer, por ejemplo, que los tres grupos consten de igual número que el primero, añadamos 9 obreros al segundo grupo y 17 al tercero. La cantidad recibida entre todos los obreros, sería entonces

$$5.984 + (69'50 \times 9) + (65 \times 17) = 7.714'50 \text{ ptas.}$$

Ahora bien: tres jornales, uno de cada grupo, suman

$$74 + 69'50 + 65 = 208'50 \text{ ptas.}$$

Luego, el número de obreros del primer grupo (y de cada uno de los otros dos, supuestos iguales), será

$$7.714'50 : 208'50 = 37$$

En realidad, los obreros del segundo grupo, son $37 - 9 = 28$; y los del tercero, $37 - 17 = 20$ obreros.

Por tanto, en la fábrica son

$$37 + 28 + 20 = 85 \text{ obreros.}$$

PLANTEO ALGEBRAICO Y RESOLUCIÓN

Designando por x al número de obreros del primer grupo, tendremos:

$$74x + 69'50(x-9) + 65(x-17) = 5.984$$

de donde,

$$x = \frac{7.714'50}{208'50} = 37$$

SOLUCIÓN: $37 + (37-9) + (37-17) = 85$ obreros.

PROBLEMA 3.° — *Una persona ha prestado la mitad de su capital a interés simple al 6'5 %, los $\frac{2}{5}$ de la otra mitad al 6 % y el resto al 5 %, por lo que recibirá una renta anual de 44.625 ptas. ¿Cuál es su capital?*

PLANTEO ARITMÉTICO Y RESOLUCIÓN (método de *falsa hipótesis)*

Supongamos que el capital fuera, por ejemplo, de 1.000 ptas. Según esto, la citada persona habría prestado 500 pesetas al 6'5 %, 200 pesetas al 6 % y 300 pesetas al 5 %.

Pero,	500 ptas.	al 6'5 %	producen	32'50 ptas.
	200 ptas.	al 6 %	producen	12 ptas.
	300 ptas.	al 5 %	producen	15 ptas.
Luego,	1.000 ptas.	producirán		59'50 ptas.

Basta ahora establecer una regla de tres simple directa; de este modo:

Si 1.000 ptas. producen 59'50 ptas.
x ptas. producen 44.625 ptas.

de donde,

$$x = \frac{44.625 \times 1.000}{59'50} = 750.000 \text{ ptas.}$$

PLANTEO ALGEBRAICO Y RESOLUCIÓN

Si designamos por x la cantidad prestada, tendremos:

$$\frac{x}{2} \text{ ptas. prestadas al 6'5 \%, producen } \frac{6'50\,x}{200}$$

$$\frac{x}{5} \text{ ptas. prestadas al 6 \%, producen } \frac{6\,x}{500}$$

$$\frac{3\,x}{10} \text{ ptas. prestadas al 5 \%, producen } \frac{15\,x}{1.000}$$

Por tanto,

$$\frac{6'50\,x}{200} + \frac{6\,x}{500} + \frac{15\,x}{1.000} = 44.625$$

de donde,

$$x = \frac{44.625 \times 1.000}{59'50} = 750.000 \text{ ptas.}$$

PROBLEMA 4.° — *Un capital de* 22.000 *ptas. fue colocado a interés simple al* 4 % *durante cierto tiempo. Luego se retiró y volvió a colocar, junto con los intereses, al* 5 %. *Esta segunda vez estuvo colocado* 6 *meses más que la primera y produjo* 3.300 *ptas. Averiguar cuál fue el interés de la primera imposición.*

PLANTEO ALGEBRAICO Y RESOLUCIÓN

Sea x el interés que produjo la primera imposición e y el tiempo (expresado en años) que duró dicha imposición. Según esto, tendremos:

1.ª imposición: $C = 22.000$ ptas.; $x = \dfrac{22.000 \times 4y}{100} = 220 \times 4y$ [1]

2.ª imposición: $C' = 22.000 + 220 \times 4y = 220(100+4y)$

$$i = \frac{220\,(100+4\,y)\cdot 5\,(y+\frac{1}{2})}{100} = 3.300$$

Después de simplificar y hacer operaciones, la última ecuación se transforma en esta otra:

$$2\,y^2 + 51\,y - 125 = 0$$

de donde,

$$y = \frac{-51 + \sqrt{51^2+8\cdot 125}}{4} = 2'25 \text{ años}$$

ya que la solución negativa hay que desecharla por no convenir al problema.

Sustituyendo y por este valor en la ecuación [1], resulta:

$$x = 220 \times 4 \times 2'25 = 1.980$$

SOLUCIÓN: El interés de la 1.ª imposición fue de 1.980 ptas.

61. Discusión de un problema general. — PROBLEMA DE LOS MÓVILES. — *Dos móviles recorren una recta indefinida* X'X *con movimiento uniforme y en el mismo sentido, uno con velocidad* v *y el otro con velocidad* v'. *En el mismo instante pasan, el primero por* A *y el segundo por* B, *siendo* d *la distancia entre* A *y* B. *¿A qué distancia del punto* A *se efectuará el encuentro de los dos móviles?* (fig. 31).

FIG. 31

Supongamos que los móviles van de izquierda a derecha, y sea E el punto de encuentro. Siendo $AB = d$, si llamamos x a la distancia AE, será $BE = x - d$.

Como en el movimiento uniforme,

$$t \text{ (tiempo)} = \frac{e \text{ (espacio)}}{v \text{ (velocidad)}}$$

desde su paso por A, o B, hasta el encuentro en E, los móviles emplearán, respectivamente, el tiempo

$$t = \frac{x}{v} \qquad \text{y} \qquad t = \frac{x - d}{v'}$$

e igualando los segundos miembros, se tiene la ecuación

$$\frac{x}{v} = \frac{x - d}{v'} \qquad \text{o su equivalente} \qquad vd = x(v - v')$$

cuya solución es

$$x = \frac{vd}{v - v'} \qquad [1]$$

DISCUSIÓN. En esta fórmula tenemos tres datos: d, v y v', a los cuales podemos atribuir diversos valores. Entre los casos que pueden considerarse, estudiaremos los siguientes:

I. *La distancia* d *no es nula.* Si d no es nula, es una cantidad esencialmente positiva, es decir $d > 0$. Esto supuesto, puede ocurrir:

1) Que $v > v'$. La fórmula [1] da en este caso para x un valor positivo, por serlo el numerador y denominador, lo cual significa que el punto de encuentro estará a derecha de A.

2) Que $v = v'$. La expresión del segundo miembro no tiene sentido, porque el denominador es igual a cero (no siéndolo el numerador). Esto nos dice que, si $v = v'$, el problema es imposible, es decir, que los móviles no se encontrarán nunca. Simbólicamente, podremos representarlo así:

$$x = \frac{vd}{0} = \infty$$

Decir que el encuentro de los móviles tendrá lugar a una distancia infinita de A, significa, por tanto, que no se encontrarán nunca.

3) Que $v < v'$. La fórmula da para x un valor negativo, pues numerador y denominador son de diferente signo. Esto indica que los móviles se han encontrado ya a la izquierda de A.

II. *La distancia* d *es nula.* El ser nula la distancia d indica que los móviles se encuentran en A, y esto, efectivamente, es lo que expresa la fórmula, pues

$$x = \frac{v \cdot 0}{v - v'} = \frac{0}{v - v'} = 0$$

Puede ocurrir que siendo $d = 0$, al mismo tiempo sea $v = v'$, en cuyo caso

$$x = \frac{0}{0} \quad \text{(ecuación indeterminada)}$$

lo cual significa que x puede tomar un valor cualquiera. En efecto: encontrándose los móviles en A, y siendo iguales las velocidades, se hallarán siempre juntos.

RESUMEN DE LA DISCUSIÓN

I. $d > 0$
1) Si $v > v'$, resulta $x > 0$; encuentro a derecha de A.
2) Si $v = v'$, resulta $x = \infty$; no se verifica encuentro.
3) Si $v < v'$, resulta $x < 0$; encuentro a izquierda de A.

II. $d = 0$
1) Si $v \neq v'$, resulta $x = 0$; encuentro en A.
2) Si $v = v'$, resulta $x = \frac{0}{0}$; los móviles van siempre juntos.

Podemos suponer también que una de las velocidades sea nula o negativa, entendiendo por velocidad nègativa la de un móvil que va en dirección de derecha a izquierda. Veamos la discusión del problema teniendo en cuenta la segunda hipótesis, y quede la primera como ejercicio para los alumnos.

62. *Resolver el problema anterior en el supuesto de que el primer móvil se traslada en el sentido* X'X *y el segundo en el sentido contrario,* XX'.

Considerando como positivo el sentido $X'X$, el XX' será negativo, por lo que la velocidad v' es ahora $-v'$, y la fórmula [1] se transforma como sigue:

$$x = \frac{vd}{v - (-v')} = \frac{vd}{v + v'}$$

En los tres casos: $v > v'$, $v = v'$ y $v < v'$, el denominador es positivo, siéndolo en consecuencia el valor de x. En todos ellos, si $d > 0$, el encuentro se verificará a derecha de A.

En el caso de ser $d = 0$, resulta $x = 0$, lo cual significa que el encuentro tiene lugar en A.

EJERCICIOS

61. Un comerciante compra 245 metros de tela a 58 ptas. metro. Vende los 3/7 con un beneficio del 30 % sobre el precio de compra y el resto con una pérdida del 6 %. ¿Qué ganancia obtuvo?

62. Un capital, con sus intereses, suma 15.000 ptas. al cabo de 5 años. Si el tanto por ciento aumentase en uno, se convertiría durante el mismo tiempo en 15.625 pesetas. Averiguar el capital y el rédito de que se trata. *(Resolver el problema, primero por Álgebra y luego por Aritmética).*

63. Una persona divide su capital en partes proporcionales a 9, 12 y 16 y las coloca a interés simple al 6 %, al 5 % y al 4 %, respectivamente, con lo que obtiene una renta anual de 7.120 ptas. ¿De qué capital se trata? [*Resolución aritmética (por falsa hipótesis) y resolución algebraica*].

64. Un lingote de oro, de ley 0'800 y 300 gramos de peso, se quiere fundir con oro puro. ¿Qué peso de este metal habrá de fundirse para que la ley de la aleación que resulte sea de 0'920? Generalizar el problema y hacer la discusión.

65. Un tren pasa a las 9 horas por la estación *A* con la velocidad de 40 Km./hora en dirección a otra *B*. Por ésta pasa un tren a las 10 horas, en dirección a la estación *A*, a la velocidad de 60 Km./hora. Distancia entre las dos estaciones, 120 Km. Calcular la hora en que se verifica el cruce y la distancia de éste a las dos estaciones. Resolver el problema analítica y gráficamente.

66. Un tren pasa por la estación *A* a las 4 horas con la velocidad de 50 kilómetros hora. Otro tren pasa por la misma estación y en el mismo sentido que el anterior a las 5 con la velocidad de 70 Km./h. Calcular la hora del encuentro y la distancia a la estación *A* a partir del punto en que aquél se verifique. Resolver el problema analítica y gráficamente.

9. Métodos especiales de la Geometría métrica: métodos de traslación y de simetría

63. Aplicación del método reductivo a la resolución de problemas geométricos. — En la lección anterior se definió el método analítico o reductivo y vimos su empleo en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos. Se aplica también constantemente en las construcciones geométricas o problemas gráficos, como tuvimos ocasión de ver en cursos pasados.

En efecto: trazar una paralela a una recta dada, se reduce a construir un ángulo igual a otro; trazar la bisectriz de un ángulo, equivale a dividir en dos partes iguales su arco correspondiente, o sea, la cuerda de éste, problema que se resuelve trazando la perpendicular a su punto medio; a esto mismo se reducen en definitiva los distintos casos del trazado de perpendiculares. El construir la tangente común a dos circunferencias, requiere resolver antes el problema de trazar una tangente a una circunferencia por un punto exterior, etc., etc.

Veamos ahora la aplicación del método reductivo a la resolución de los dos problemas siguientes:

PROBLEMA 1.° — *Construir el arco capaz del ángulo* α, *descrito sobre el segmento* AB (fig. 32).

Recordemos que *se llama arco capaz de un ángulo dado* α, *al arco de circunferencia tal que todos los ángulos inscritos en él sean iguales al dado.*

Datos. — El ángulo α y el segmento *AB*.

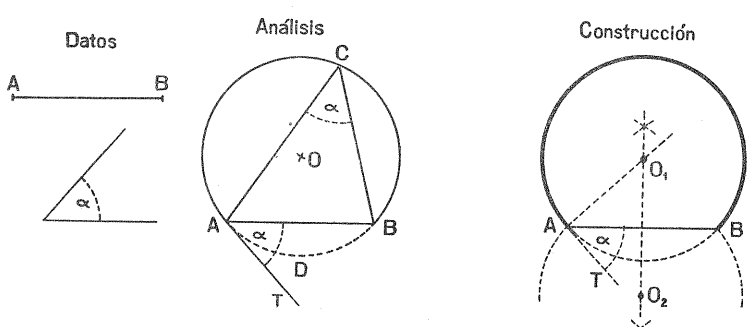


FIG. 32

Análisis. — Supongamos una circunferencia O a la que trazamos una cuerda igual al segmento dado AB, y una tangente AT que forme con la cuerda un ángulo BAT igual al dado α. El ángulo así formado BAT será semiinscrito y su medida igual a la mitad del arco ADB. Por otra parte, los ángulos inscritos en el arco ACB tienen todos también por medida la mitad del arco ADB y, por consiguiente, son iguales entre sí e iguales al ángulo dado α.

Construcción. — Se reduce a buscar el centro del arco en cuestión. Para ello, sobre AB como lado se construye un ángulo BAT igual al α, y considerándole como semiinscrito en la circunferencia a que pertenece el arco que buscamos, se deduce que AT será una tangente a dicha circunferencia, por lo que ésta tendrá su centro en la perpendicular a AT trazada por A.

Además, como AB es una cuerda de esa misma circunferencia, el centro estará en la mediatriz O_1O_2 de AB. Luego, la intersección de esta mediatriz con la perpendicular AO_1, será el centro de la circunferencia o del arco pedido, cuyo trazado no ofrece ya dificultad.

Discusión. — Para que el problema sea posible, ha de ser $\alpha < 180°$. En realidad, la solución completa está constituída por dos arcos de circunferencia simétricos con respecto a AB, ya que el ángulo α puede colocarse a uno u otro lado de AB. Obtenido el centro O_1, es fácil determinar el O_2, puesto que dichos puntos son simétricos respecto de AB.

PROBLEMA 2.° — *Trazar una circunferencia que pase por dos puntos dados y sea tangente a una recta también dada* (fig. 33).

Datos. — Los puntos A y B y la recta r.

Análisis. — Si suponemos trazada la figura, vemos que, de conocer el punto C de contacto de la circunferencia que buscamos con la recta r, el problema se reduciría a trazar la circunferencia que pasa por tres puntos dados.

Ahora bien: la determinación del punto C se reduce, a su vez, a la del segmento MC, que es una media proporcional entre los conocidos MA y MB, puesto que $\overline{MC} = MA \times MB$.

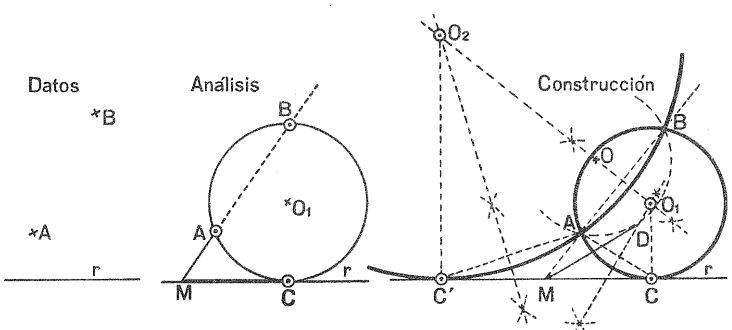


FIG. 33

Construcción. — Se determina el punto M, trazando la recta AB y prolongando hasta cortar a r. Luego se construye la media geométrica MD a los segmentos MA y MB (esta operación se ha hecho en la figura por medio de la tangente MD a la circunferencia auxiliar O, que pasa por A y B), y, a partir de M, se lleva sobre la recta r. Una vez conocido el punto C, el centro de la circunferencia que buscamos se encontrará en las mediatrices de AB y AC, y también en la perpendicular a r por C.

Discusión. — En el caso de que A y B se hallen a un mismo lado de la recta r, habrá dos soluciones, ya que el segmento MC puede tomarse a un lado y a otro de M, por lo que se obtendrán dos puntos C y C'.

Si uno de los puntos A o B está en la recta r, el problema tendrá una sola solución.

Y si A y B están a distinto lado de r, no habrá ninguna solución, ya que, de suponer que la hubiera, M debería quedar dentro de la circunferencia, en cuyo caso r no podría ser tangente.

64. OTROS MÉTODOS ESPECIALES DE LA GEOMETRÍA MÉTRICA: **Transformación de figuras.** — Para la resolución de muchos problemas de Geometría se emplean los métodos llamados de *transformación de figuras* y de *lugares geométricos*. Tratamos ahora del primero, y luego, en la lección 11, hablaremos de los lugares geométricos y su aplicación a la resolución de problemas.

Las transformaciones geométricas tienen por objeto modificar en todo o en parte la figura dada, o colocarla de forma que facilite la resolución del problema que se nos propone.

Entre las transformaciones más usadas en Geometría se encuentran las de *traslación, rotación, simetría, semejanza* y *homotecia*.

Por la traslación y rotación se consiguen figuras iguales a las dadas, pero en posición conveniente para la resolución del problema. En virtud de la simetría, semejanza y homotecia, se obtienen figuras en las que, aun cuando se modifiquen ciertos elementos respecto de los primitivos, otros, los que nos interesan, permanecen invariables.

65. Método de traslación. — PROBLEMA 1.° *Trazar la bisectriz del ángulo que forman dos rectas* a *y* b *que no llegan a cortarse* (fig. 34).

Se trasladan las dos rectas paralelamente a sí mismas, acercándolas en una longitud igual r, de modo que se corten. Bastará luego trazar la bisectriz OB del ángulo obtenido.

PROBLEMA 2.° *Entre dos pueblos* A *y* B, *a distinto lado de un río, de márgenes rectas y paralelas, se quiere construir un puente perpendicular a las orillas. Suponiendo que los referidos pueblos están desigual-*

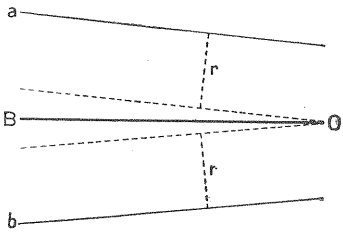


FIG. 34

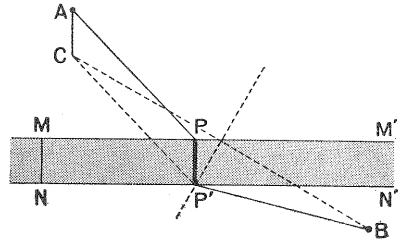


FIG. 35

mente alejados del río, determinar el lugar preciso en que ha de construirse el puente, para lograr que las distancias respectivas de cada pueblo a la entrada del puente, sean iguales.

Sean A y B los pueblos, y MM' y NN' las orillas del río en cuestión (fig. 35). Efectuaremos una traslación paralela del punto A (pueblo más alejado), aproximándolo al río en una longitud igual a la distancia MN que separa las dos orillas. Para ello, tracemos AC perpendicular a MM' y tomemos $AC = MN$.

Si unimos ahora C con B y trazamos la mediatriz de CB, el punto P' de intersección con la recta NN', indicará el lugar exacto en que ha de construirse el puente, ya que se tiene, en efecto: $CP' = P'B$ y $CP' = AP$; luego, $AP = BP'$.

PROBLEMA 3.° *Trazar las tangentes exteriores comunes a dos circunferencias dadas, de centros* O *y* O′ *y radios* OA = r *y* O′A′ = r′ (figura 36). Ha de ser $r \neq r'$.

Se traza, en primer lugar, una circunferencia de radio $r - r'$ y cuyo centro sea el de la circunferencia mayor. Luego, se construye la tangente $O'C$ a dicha circunferencia, pasando por el centro O' de la menor. Finalmente, bastará trasladar paralelamente la tangente $O'C$ en una distancia $r' = O'A'$ para tener AA', una de las tangentes pedidas. La otra, BB', será simétrica de la primera con respecto a la línea de los centros OO'.

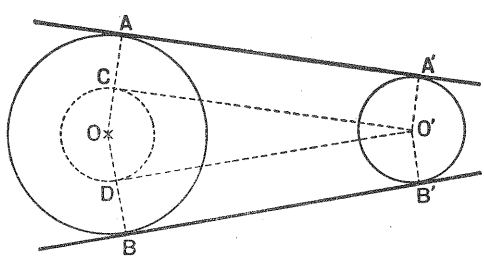


FIG. 36

66. Método de simetría. — PROBLEMA 1.° *Dado un polígono y un punto interior al mismo, trazar por él un segmento rectilíneo que una dos puntos del contorno de dicho polígono y quede dividido por el punto dado en dos partes iguales.*

Sea, por ejemplo, el cuadrilátero *ABCD* y *P* el punto que nos dan (fig. 38).

Bastará construir el cuadrilátero *A'B'C'D'*, simétrico del dado, respecto del punto *P*. Los puntos *M* y *N*, comunes a los dos polígonos, determinan el segmento pedido.

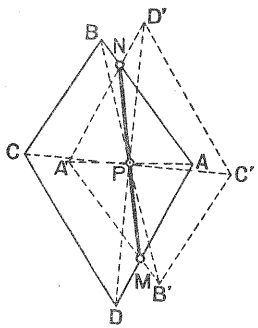


FIG. 38

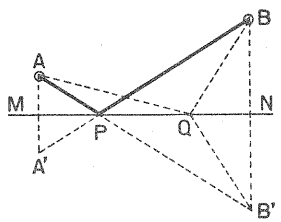


FIG. 39

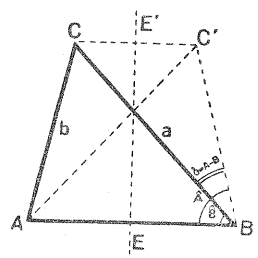


FIG 40

PROBLEMA 2.° *Hallar el camino más corto para ir de* A *a* B *tocando en un punto* P *a la recta* MN (fig. 39).

Determinaremos los puntos *A'* y *B'*, simétricos de *A* y *B* respecto de *MN*. Uniendo luego *A* con *B'* y *B* con *A'*, tendremos la trayectoria *APB*, que es la solución pedida. En efecto: cualquier otro camino, como el *AQB*, es más largo, ya que

$$APB = AP + PB' = AB' \qquad \text{y} \qquad AQB = AQ + QB' > AB'$$

La luz, el sonido, una bola de billar, una pelota, etc., siguen siempre al reflejarse el camino más corto. La misma solución que el anterior, tendrá este otro problema:

Sobre una recta MN, *hallar un punto* P, *de manera que las rectas* AP *y* BP *que determina con dos puntos dados* A *y* B *situados del mismo lado de la recta, formen con ella ángulos* APM *y* BPN *iguales.*

PROBLEMA 3.° *Construir un triángulo, conociendo dos de sus lados* a *y* b *y la diferencia de los ángulos opuestos* A − B.

Supongamos resuelto el problema, es decir, sea ABC el triángulo pedido (figura 40). Si construímos el simétrico de ABC, respecto a la mediatriz EE' de AB, como eje, vemos que el triángulo BCC' se puede construir fácilmente, ya que

$$BC = a, \quad BC' = b \quad \text{y} \quad CBC' = A - B$$

Una vez dibujado el triángulo BCC', es fácil obtener la construcción pedida, con solo trazar el triángulo $CC'A$ y unir luego A con B.

EJERCICIOS

67. Construir un trapecio, del que se conocen los cuatro lados.

68. Dadas dos circunferencias, trazar una paralela a la línea de los centros OO', de manera que las circunferencias intercepten en dicha paralela un segmento de longitud dada m.

69. Dada una circunferencia de radio r, trazar en ella una cuerda cuya longitud y dirección sea igual a un segmento dado m.

70. Construir un triángulo del que se conocen las tres medianas, m_a, m_b y m_c.

71. Dados dos puntos M y N en el interior de un ángulo ABC, hállese el camino más corto para ir de M a N, tocando sucesivamente a los dos lados en un punto.

72. Trazar una recta perpendicular a otra dada AB, de tal modo que las cuerdas que determine al cortar a dos circunferencias fijas, sean iguales.

10. Métodos especiales de la Geometría métrica: métodos de rotación y de semejanza

67. Método de rotación. — PROBLEMA 1.° *Construir un triángulo equilátero, cuyos vértices estén situados uno en cada una de tres rectas paralelas dadas,* r_1, r_2 *y* r_3 (fig. 41).

Sobre un punto cualquiera de la recta r_1, situemos el vértice A. Tomando ahora el punto A como centro, imprimamos un movimiento de rotación de 60° a la recta r_3; la nueva posición de esta recta, r'_3, cortará a la r_2 en un punto B, que será el segundo vértice del triángulo pedido. El resto de la construcción no ofrece dificultad.

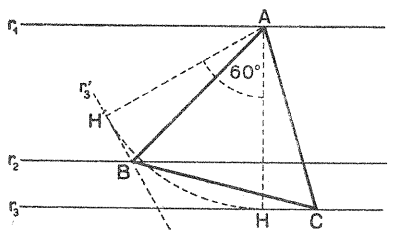


FIG. 41

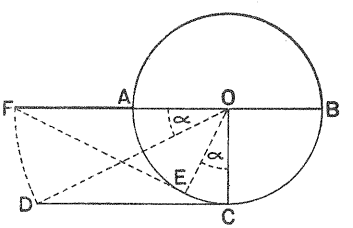


FIG. 42

PROBLEMA 2.° *Dado un segmento* AB (fig. 42), *prolongarlo de manera que el segmento total obtenido quede dividido por el punto* A *en su media y extrema razón, y sea* AB *la parte mayor.*

Trazaremos una circunferencia con diámetro igual a AB, y construiremos la tangente CD, igual y paralela a AB. Uniendo luego D con O e imprimiendo al triángulo OCD una rotación de amplitud igual a α, de modo que OD quede en la prolongación de AB, resulta:

$$FE = DC = AB, \quad \text{pero} \quad \overline{FE}^2 = FB \times FA; \quad \text{luego,} \quad \overline{AB}^2 = FB \times FA$$

lo cual indica que FA es la prolongación pedida.

68. Método de semejanza. — PROBLEMA 1.° *Dado un triángulo isósceles* ABC, *inscribir en él un cuadrado.*

Sobre la base AC del triángulo (fig. 43), se construye un cuadrado cualquiera, que tenga la altura BO por eje de simetría. Uniendo luego O con los vértices M y N, y prolongando las rectas hasta cortar a los lados del triángulo, se obtienen los puntos P y Q, que serán dos vértices del cuadrado pedido; los otros dos, R y S, se hallan fácilmente.

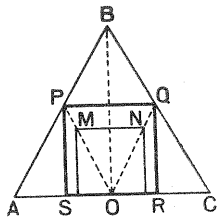


FIG. 43

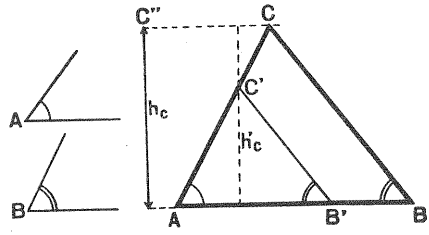


FIG. 44

PROBLEMA 2.° *Construir un triángulo* ABC, *conociendo los ángulos* A *y* B *y la altura correspondiente a* C.

Se construye (fig. 44) un triángulo $AB'C'$ que tenga dos ángulos iguales a los dados, y se traza la altura h'_c. Se lleva luego sobre h'_c la altura dada h_c, y se traza por su extremo la paralela $C''C$ a la base AB', hasta cortar a la prolongación del lado AC' en C. Si trazamos ahora por C la recta CB, paralela a $C'B'$, que corta en B a la prolongación de AB', tendremos el triángulo pedido.

PROBLEMA 3.° *Construir un triángulo* ABC, *conociendo los ángulos* A y B *y el perímetro* p.

Construyamos (fig. 45) un triángulo $AB'C'$ que tenga los ángulos A y B' iguales a los dados. Tomemos ahora a partir de A y sobre una recta AD que forme ángulo con AB', los lados c', a', b', del triángulo construído; y sobre el lado AB' y su prolongación, llevemos el perímetro p que nos han dado. Uniendo luego los extremos D y E y trazando paralelas a la recta DE, se obtendrán sobre AE los lados a, b y c del triángulo pedido.

PROBLEMA 4.° *Construir un pentágono regular, conociendo el lado* l *(o* l') *del mismo* (fig. 46).

Se traza una circunferencia O (fig. 46) con un radio cualquiera OA y se construye en ella el pentágono inscrito; para lo cual, basta obtener el lado p, y lle-

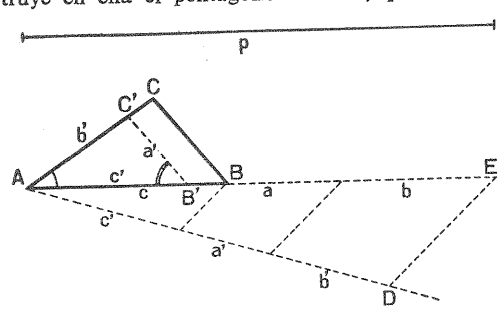


FIG. 45

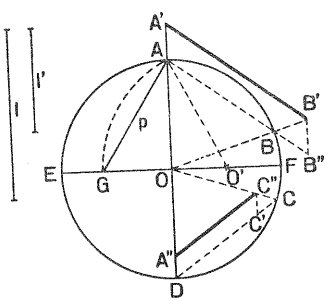


FIG 46

varlo sobre la circunferencia cinco veces consecutivas. El lado del pentágono inscrito se obtiene, trazando dos diámetros perpendiculares entre sí AD y EF. Se toma luego como centro a O', punto medio de OF, y, con radio $O'A$, se describe un arco AG, el cual cortará a la recta EF en el punto G. La recta $AG = p$ será el lado del pentágono inscrito.

Supongamos, en primer lugar, que el lado l conocido es mayor que $AB = p$. En este caso, se prolonga AB hasta B'', de modo que AB'' sea igual al lado l. Por B'' se traza después una paralela al radio OA, que corta en B' a la prolongación del radio OB. El segmento $A'B' = AB''$ será uno de los lados del pentágono pedido; los demás se obtienen fácilmente, con sólo trazar paralelas a los correspondientes lados homólogos del pentágono inscrito.

Si el lado conocido fuera l', menor que el lado p del pentágono inscrito, se procede de forma análoga. Tomaremos sobre $DC = p$ el segmento DC', igual a l'; por C' se traza $C'C''$, paralela al radio OD, que corta al radio OC en el punto C'', y por este punto se traza la paralela $C''A''$ al lado CD. El segmento $C''A''$ será uno de los lados del pentágono pedido, siendo ya fácil obtener los restantes.

EJERCICIOS

73. Dada una circunferencia O y un punto fijo P, trazar una recta que pase por P, de manera que el segmento interceptado por la circunferencia, sea igual a un segmento dado m.

74. Construir un cuadrado con un vértice en un punto fijo A, y los dos vértices contiguos en dos rectas dadas r_1 y r_2.

75. Dada una circunferencia, inscribir en ella un triángulo isósceles cuya base sea igual a la mitad de la altura.

Construir un triángulo, conociendo los elementos que se indican:

76. A, B y h_b (altura)

77. A, B y b_a (bisectriz)

78. B, C y p (perímetro)

79. A, C y m_b (mediana)

80. A, B y $a - b = 2$ cm.

81. C, $a : b = \frac{2}{3}$, $h_a = 3$ cm.

82. A, $b : c = \frac{3}{4}$, $b_c = 4$ cm.

83. B, $a : c = \frac{4}{3}$, $m_b = 3$ cm.

84. B, $a : c = \frac{2}{3}$, $a + b = 6$ cm.

85. C, $a : b = \frac{5}{4}$, $a + b + c = 12$ cm.

86. C, $a : b = \frac{6}{5}$, $a - b = 3$ cm.

87. Construir un cuadrado, dándonos un segmento m que es igual a la suma de la diagonal y el lado.

88. Dado un pentágono irregular, construir otro semejante del que se conoce el perímetro p.

11. Métodos especiales de la Geometría métrica: métodos de los lugares geométricos

69. Lugar geométrico de puntos. — *Se denomina lugar geométrico de puntos, a la línea o figura formada por todos los puntos que tienen una misma propiedad.*

Para probar que una figura es el lugar geométrico de los puntos que poseen una determinada propiedad, es preciso demostrar estos dos teoremas, uno recíproco de otro:

1.° *Que todos los puntos de la figura tienen la propiedad mencionada.*

2.° *Que todos los puntos que poseen dicha propiedad pertenecen a la figura.*

En lugar de este *recíproco*, se puede demostrar el *contrario*, ya que, como se vio (núm. 5, II), la certeza del contrario supone la del recíproco. O sea que, se prueba también la existencia de un lugar geométrico, demostrando:

1.° *Que todos los puntos de la figura tienen la propiedad mencionada.*

2.° *Que si un punto no pertenece a la figura, no posee la propiedad mencionada.*

70. Ejemplos de lugares geométricos. — Limitándonos solamente a figuras planas, citaremos algunos lugares geométricos de interés más señalado.

1.° *El lugar geométrico de los puntos de un plano que se encuentran a una distancia* r *de un punto fijo* O, *es una circunferencia de radio* r *y centro* O (fig. 47).

2.° *El lugar geométrico de los puntos de un plano equidistantes de dos fijos* A *y* B, *es la mediatriz del segmento* AB *que éstos determinan* (figura 48).

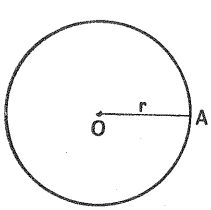


FIG. 47

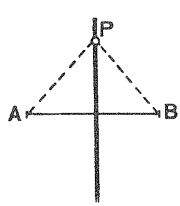


FIG. 48

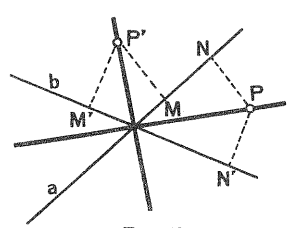


FIG. 49

3.° *El lugar geométrico de los puntos de un plano equidistantes de dos rectas* a *y* b *que se cortan, es el conjunto de las dos bisectrices de los ángulos que forman* (figura 49).

4.° *El lugar geométrico de los puntos de un plano que distan de una recta* AB *una longitud* m, *es el conjunto de las dos paralelas a la dada, trazadas una a cada lado y a la distancia* m (fig. 50).

5.° *El lugar geométrico de los puntos de un plano equidistantes de dos rectas paralelas* AB *y* CD, *es una recta paralela equidistante de ellas* (figura 51).

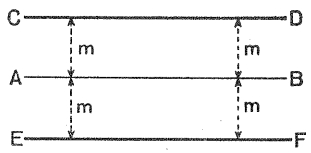


FIG. 50

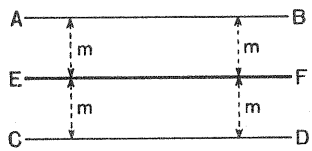


FIG. 51

6.° *El lugar geométrico de los puntos de un plano que unidos con los extremos de un segmento rectilíneo* AB, *determinan ángulos iguales a uno dado* α *es el conjunto de los dos arcos capaces de dicho ángulo, descritos sobre el segmento* AB (fig. 52).

7.° *El lugar geométrico de los puntos de un plano que unidos con los extremos de un segmento rectilíneo, determinan ángulos iguales a un recto, es una circunferencia trazada sobre dicho segmento como diámetro.*

8.° *El lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a una recta en un punto, es la perpendicular a la recta en ese punto.*

9.° *El lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a una circunferencia dada en un punto fijo, es la recta que une dicho punto con el centro de la circunferencia.*

10. *El lugar geométrico de los centros de las circunferencias de radio* r *que pasan por* O, *es la circunferencia de radio* r *y centro* O (fig. 53).

11. *El lugar geométrico de los centros de las circunferencias de radio* r', *tangentes exteriores (o interiores) a una circunferencia dada de radio* r, *es otra circunferencia concéntrica a la anterior y de radio* r + r' *(o* r−r'). Figura 54.

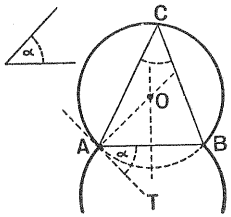


FIG. 52

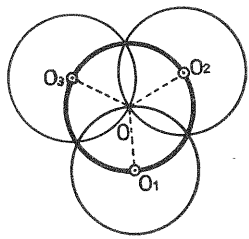


FIG. 53

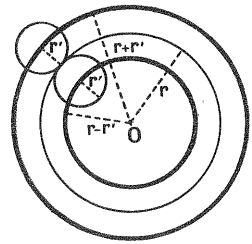


FIG. 54

12. *El lugar geométrico de los puntos de un plano de igual potencia con respecto a dos circunferencias, es el eje radical de éstas.* (Ver número 54, fig. 29, *a*, *b* y *c*).

71. Resolución de problemas por el método de los lugares geométricos. — Uno de los procedimientos más fecundos que se usan en Geometría para la resolución de problemas, se basa en la *intersección de lugares geométricos.*

Con mucha frecuencia, en efecto, los problemas geométricos se reducen a determinar un punto que reúna simultáneamente dos propiedades o condiciones. Cuando tales condiciones pueden ponerse de manifiesto mediante dos lugares geométricos, que sean, como los antes mencionados, rectas o arcos de circunferencia, bastará construirlos para obtener el punto, o puntos, de intersección que será la solución del problema.

Es decir, que, para determinar un punto que satisfaga dos condiciones, haremos lo siguiente:

1.° *Construiremos el lugar geométrico de los puntos que posean la primera condición.*

2.° *Construiremos el lugar geométrico de los puntos que cumplan con la segunda condición.*

Todo punto que se encuentre, a la vez, en los dos lugares geométricos, será solución del problema.

Para hallar, por ejemplo, el centro de la circunferencia que pasa por tres puntos, hacemos así: Prescindiendo de uno de los puntos, trazamos la mediatriz de la recta que une los otros dos; prescindiendo luego de uno de éstos, construímos la mediatriz del segmento determinado por los dos puntos considerados. La intersección de ambas mediatrices es el centro buscado.

Veamos cómo se resuelven otros problemas fundados también en la intersección de dos lugares geométricos.

PROBLEMA 1.° *Construir una circunferencia de radio conocido r, que sea tangente exteriormente a otra circunferencia* C *y a una recta* AB *dadas* (figura 55).

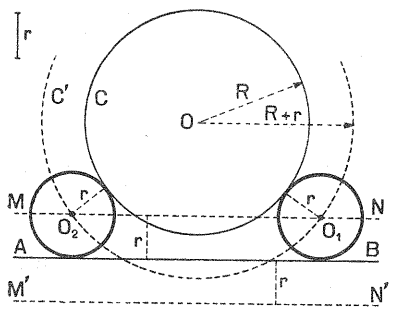


FIG. 55

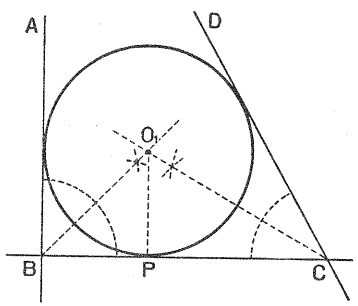


FIG. 56

La circunferencia pedida, por ser tangente exteriormente a la circunferencia *C*, de radio *R*, deberá tener su centro en otra circunferencia concéntrica *C'*, de radio igual a $R + r$.

Por otra parte, debiendo ser la circunferencia que nos piden, tangente a la recta *AB*, su centro se encontrará a la distancia *r* de dicha recta; se hallará, por tanto, en cualquiera de las dos paralelas a *AB*, trazadas a la distancia *r*.

En consecuencia, cualquiera de los puntos O_1 y O_2, intersección de los dos lugares geométricos construídos, puede servir de centro de la circunferencia buscada.

Discusión. — Si *C'* corta a las dos paralelas *MN* y *M'N'*, hay cuatro soluciones; si corta a una y es tangente a otra, habrá tres soluciones; si sólo corta a una (como en la figura), hay dos soluciones; si *C'* es tangente a una de las dos paralelas, la solución es única; finalmente, si la circunferencia *C'* no corta a ninguna de las dos paralelas *MN* y *M'N'*, el problema carece de solución.

PROBLEMA 2.° *Describir una circunferencia que sea tangente a tres rectas dadas, secantes entre sí.*

Sean las rectas *AB* (fig. 56), *BC* y *CD*, que se cortan en *B*, en *C* y en la prolongación de *AB* y *CD*.

Primer lugar geométrico: El centro de la circunferencia pedida, por ser ésta tangente a las rectas *AB* y *BC*, deberá encontrarse en cualquiera de las dos bisectrices de los cuatro ángulos formados en *B*.

Segundo lugar geométrico. Asimismo, por ser la circunferencia tangente a *BC* y *CD*, el centro ha de estar en cualquiera de las dos bisectrices de los cuatro ángulos que se forman en *C*.

Las intersecciones de los dos pares de bisectrices, determinan cuatro puntos, dando lugar a otras tantas soluciones del problema, de las que solamente aparece una en la figura. (Halle las restantes el alumno). Obtenido el centro O_1 de la circunferencia, el radio viene dado por la perpendicular O_1P trazada a una cualquiera de las rectas.

Discusión. Tal como se enuncia, el problema es siempre posible y tiene cuatro soluciones.

72. Construcción de triángulos. — Merced al procedimiento de los lugares geométricos, se pueden resolver muchos problemas de construcción de triángulos, conociendo tres de sus elementos, distintos de los considerados en los casos fundamentales estudiados en cursos anteriores. Entre los elementos conocidos ha de figurar, por lo menos un segmento rectilíneo: un lado, una altura, una mediana o una bisectriz.

Para abreviar el enunciado de estos problemas, es costumbre designar cada elemento por una sola letra: los ángulos, por las mayúsculas de sus vértices; los lados, por las minúsculas de los vértices opuestos; las alturas, bisectrices y medianas, respectivamente, por *h*, *b* y *m*, afectadas de un subíndice que es la letra con que se designa el lado a que corresponden.

PROBLEMA 1.° *Construir un triángulo conocidos* a, h_a *y* A (fig. 57).

Fijada una determinada posición para el lado $a = BC$, el problema estará resuelto si logramos situar el vértice del ángulo *A*. Como conocemos la altura h_a, el vértice *A* se encontrará en una paralela al lado *a*, trazada a la distancia h_a.

Por otra parte, el vértice en cuestión ha de encontrarse también en el arco capaz del ángulo *A* descrito sobre el segmento $a = BC$.

La intersección, por tanto, de ambos lugares geométricos, nos da la situación del vértice buscado.

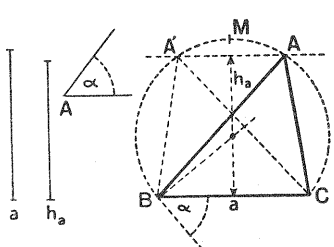


FIG. 57

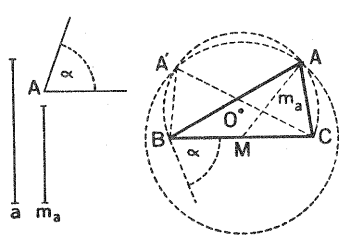


FIG. 58

Discusión. Si h_a es menor que la distancia del punto medio M del arco al lado a, hay dos puntos de intersección (como en la figura), pero como los dos triángulos obtenidos son simétricos respecto de la mediatriz del lado a, diremos que hay sólo una solución. Si h_a es igual a aquella distancia, la paralela es tangente al arco, y el punto de intersección determina con los extremos de a un triángulo isósceles. Finalmente, si h_a es mayor que la distancia, no hay puntos de intersección y, por consiguiente, el problema carece de solución.

PROBLEMA 2.° *Construir un triángulo conociendo el lado* a, *la mediana* m_a *y el ángulo* A (fig. 58).

El problema es análogo al anterior. Se comienza por fijar la posición del lado $a = BC$. El vértice A se encontrará en una circunferencia de centro M, punto medio de BC, y radio igual a m_a.

Asimismo, el vértice A deberá encontrarse en el arco capaz del ángulo A, construído sobre el segmento rectilíneo $a = BC$.

Luego, la intersección de estos dos lugares geométricos (circunferencia de centro M y arco capaz de centro O), nos dan la situación del vértice A que buscamos.

Discusión. Hágala el alumno por analogía con la del problema anterior.

EJERCICIOS

89. Trazar una circunferencia de radio r, que pase por un punto fijo A y sea tangente a una recta BC. Discutir el problema.

90. Construir una circunferencia de radio r, que tenga el centro sobre una recta AB y sea tangente a otra circunferencia dada. Discusión del problema.

91. Construir una circunferencia de radio conocido, que pase por un punto dado y sea tangente a otra circunferencia dada. Discusión del problema.

92. Trazar una circunferencia de radio R, que sea tangente exteriormente a otras dos circunferencias cuyos radios respectivos son r y r'. Discusión.

93. Construir un triángulo conociendo a, h_a y m_a.

94. Construir un triángulo conociendo b, B y $s = a + c$.

95. Construir un paralelogramo conociendo los lados y el ángulo que forman las diagonales.

12. La función exponencial

73. Variación de las potencias de números mayores que la unidad. — TEOREMA. *Las potencias de exponente natural de los números mayores que la unidad:* 1.°, *son mayores que la unidad;* 2.°, *crecen al crecer el exponente, y* 3.°, *pueden llegar a ser mayores que cualquier número dado* K, *por grande que sea.*

En efecto: un número a mayor que la unidad puede representarse por $1 + h$, siendo h un número positivo. Luego:

1.° Las potencias son mayores que la unidad, por ser cada una de ellas un producto de varios factores, todos mayores que la unidad.

2.° Escribiendo la identidad ..... $(1+h)^m = (1+h)^m$
y la desigualdad ..... $1+h > 1$
y multiplicando, obtenemos ..... $(1+h)^{m+1} > (1+h)^m$

con lo que se prueba la segunda parte del enunciado.

3.° Es evidente que

$$(1+h)^2 > 1 + 2h; \qquad (1+h)^3 > 1 + 3h$$

y generalizando:

$$(1+h)^m > 1 + mh$$

Para que $(1+h)^m$ sea mayor que cualquier número dado K, bastará determinar m de modo que se tenga

$$1 + mh > K \quad \text{o sea} \quad m > \frac{K-1}{h}$$

lo cual siempre es posible. Esto se expresa diciendo que $(1+h)^m$ tiende a ∞ cuando m crece indefinidamente.

74. Variación de las potencias de números menores que la unidad. — TEOREMA. *Las potencias de exponente natural de números positivos menores que la unidad:* 1.°, *son menores que la unidad;* 2.°, *decrecen cuando el exponente crece, y* 3.°, *tienen por límite cero cuando el exponente crece indefinidamente.*

En efecto: un número a positivo y menor que la unidad, es decir, comprendido entre 1 y 0, puede representarse por $\frac{1}{a'}$, siendo a' superior a la unidad; entonces, se tiene:

$$a^m = \frac{1}{a'^m}$$

y de esta igualdad se deducen inmediatamente las tres conclusiones del teorema, puesto que a^m cumple las tres partes de la tesis del teorema del párrafo anterior.

75. Exponentes fraccionarios. — TEOREMA. *Si a es un número mayor que la unidad, se tiene:*

1.° $a^{\frac{m}{n}} > 1$, ya que a^m, que es la potencia n-ésima del primer miembro, es mayor que 1, que es la potencia n-ésima del segundo miembro.

2.° $a^{\frac{m}{n}} > a^{\frac{m'}{n'}} \left(\text{si } \frac{m}{n} > \frac{m'}{n'} \right)$

En efecto: por hipótesis, se tiene que $mn' > m'n$; luego, $a^{mn'}$ (potencia nn'-ésima del primer miembro) es mayor que $a^{m'n}$ (potencia nn'-ésima del segundo miembro).

De un modo análogo se demostraría que *si a es un número positivo menor que la unidad:*

1.° $a^{\frac{m}{n}} < 1$; 2.° $a^{\frac{m}{n}} < a^{\frac{m'}{n'}} \left(\text{si } \frac{m}{n} > \frac{m'}{n'} \right)$

76. Exponentes negativos. — TEOREMA. *Si a es mayor que la unidad:*

1.° $a^{-m} < 1$, puesto que $a^{-m} = \frac{1}{a^m} < 1$.

2.° $a^{-m} > a^{-n}$ cuando $-m > -n$ (o $m < n$).

En efecto:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} > \frac{1}{a^n} = a^{-n} \quad (\text{si } m < n)$$

Análogamente se demostraría que *si a es un número positivo menor que la unidad:*

1.° $a^{-m} > 1$; 2.° $a^{-m} < a^{-n}$ cuando $-m > -n$.

77. Exponentes irracionales. — Admitiremos, sin demostrarlo, que todo lo dicho sobre las potencias de exponente racional se verifica también cuando el exponente es un número irracional.

Según esto, si por m y n representamos dos números cualesquiera, racionales o irracionales, positivos o negativos, tendremos el siguiente cuadro-resumen:

1.°	$a^m > 1$,	si $a > 1$ y $m > 0$
	$a^m > a^n$,	si $a > 1$ y $m > n$
2.°	$a^m < 1$,	si $0 < a < 1$ y $m > 0$
	$a^m < a^n$,	si $0 < a < 1$ y $m > n$

78. Función exponencial. Propiedades. — *Se llama función exponencial a la función definida por la fórmula* $y = a^x$, *donde* x *es la variable independiente,* a *es un número positivo fijo, distinto de* 0 *y de* 1, *e* y *es la variable dependiente o función.*

La función exponencial goza de las siguientes propiedades:

1.ª *La potencia* a^x *tiene siempre valor positivo.*

En efecto: si fuera, por ejemplo,

$$a^b = -c \quad \text{se obtendría} \quad a = \sqrt[b]{-c}$$

lo cual es imposible, pues una raíz de un número negativo ha de ser o negativa o imaginaria (ver núm. 155), y en este caso sabemos que a es positivo.

Cuando el exponente b sea fraccionario, de denominador par, convenimos en tomar para la potencia sólo el valor positivo. Análogamente haremos cuando el exponente sea irracional.

2.ª *Cuando la base* a *es mayor que* 1, *si el exponente crece desde* $-\infty$ *hasta* $+\infty$, *la potencia crece desde* 0 *hasta* ∞.

3.ª *Cuando la base* a *es menor que* 1, *si el exponente crece desde* $-\infty$ *hasta* $+\infty$, *la potencia decrece desde* ∞ *hasta* 0.

79. Representación gráfica de la función exponencial: $y = a^x$.

1.° Supongamos primero que $a > 1$. Vamos a construir, por ejemplo, la gráfica de la función $y = 2^x$.

Dando valores a x y hallando los correspondientes de y, obtenemos la siguiente tabla de valores, con los cuales se ha trazado la fig. 59:

x	$-\infty$	...	-2	-1	0	1	2	3	...	∞
$y = 2^x$	0	...	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...	∞

En dicha gráfica se observa que para valores negativos de x, la función y toma valores positivos menores que 1, de modo que cuando x se aproxima a $-\infty$, y tiende a 0; es decir, la curva se acerca indefinidamente al eje $X'X$ sin tocarle nunca. Se dice, por esto, que $X'X$ es *asíntota* de la curva.

Para valores positivos de x, la función y toma valores superiores a 1, creciendo indefinidamente cuando x tiende a ∞.

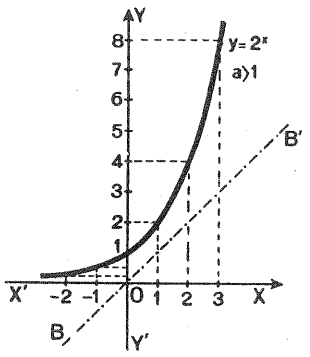


FIG. 59

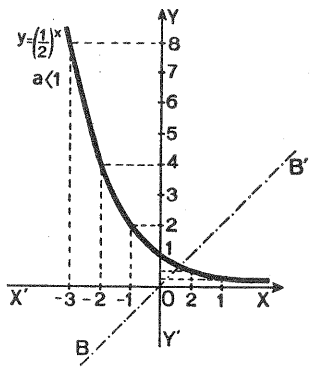


FIG. 60

2.° Supongamos ahora que $a < 1$, y construyamos, por ejemplo, la curva de la función $y = (\frac{1}{2})^x$.

Hallando como antes la tabla de valores, resulta:

x	$-\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	...	∞
$y = (\frac{1}{2})^x$	∞	...	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	...	0

Valores que dan origen a la curva de la figura 60. Como se ve, cuando $a < 1$, la gráfica es simétrica de la anterior respecto del eje OY.

EJERCICIOS

96. Construir la gráfica de las funciones siguientes: $y = 3^x$; $y = (\frac{1}{3})^x$.

97. El mismo ejercicio con $y = \frac{1}{4} \cdot 3^x$ e $y = \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{3})^x$.

98. Calcular con aproximación de centésimas el valor de las expresiones siguientes:

$$5^{\frac{5}{2}}; \quad 3^{\frac{3}{2}}; \quad 5^{-\frac{5}{2}}; \quad 3^{-\frac{3}{2}}.$$

13. La función logarítmica

80. Definición de logaritmo. — *Logaritmo de un número es el exponente a que se ha de elevar una base positiva y distinta de la unidad para que dé el número dado.*

Para expresar que x es el logaritmo de un número n, respecto de la base a, se usa la notación $\log_a n = x$, que se lee «logaritmo en base a de n igual a x».

Al número n se le denomina *antilogaritmo* de x en base a.

Según la definición:

si $n = a^x$, ... es $x = \log_a n$
porque, si x es el exponente, ... x es el logaritmo

y viceversa:

si $x = \log_a n$, ... es $a^x = n$
porque, si x es el logaritmo, ... x es el exponente

La operación de hallar el logaritmo de un número se llama *logaritmación;* es inversa de la potenciación.

81. SISTEMAS DE LOGARITMOS. — El conjunto de los logaritmos de todos los números, respecto de la base a, constituyen lo que llamamos *sistema de logaritmos en base* a. Como puede tomarse como base un número positivo cualquiera, siempre que no sea la unidad, habrá, pues, infinitos sistemas de logaritmos. Los más usados son únicamente estos dos:

1.° *Sistema decimal, vulgar o de Briggs* [1], que tiene por base el número 10. Será el que usaremos nosotros.

El logaritmo decimal de n se expresa por la notación log n, sin especificar la base, que se sobrentiende.

2.° *Sistema natural o neperiano* [1], que tiene por base el número

$$e = 2'7182818284...$$

(1) *Henry* BRIGGS, matemático inglés (1556-1630).

(1) En honor de *John* NEPER (1560-1617), matemático escocés, su descubridor.

El número e es el más importante de las Matemáticas. En otro curso se estudiará su determinación.

El logaritmo neperiano de n se puede representar por una cualquiera de estas cuatro notaciones: $\log_e n$, L n, l n, o ln n, pero la última es la más generalizada.

82. Gráfica de la función logarítmica: $y = \log_a x$. — La expresión general del logaritmo de un número cualquiera x, se indica por $y = \log_a x$, notación que sirve también para representar a la llamada *función logarítmica.*

Según la definición de logaritmo, la función

$$y = \log_a x \text{ es equivalente a } x = a^y$$

expresión esta última que coincide con la función exponencial $y = a^x$, si consideramos como variable independiente a y y como función a x. Quiere esto decir que la *función logarítmica es inversa de la exponencial.*

Por consiguiente, obtendremos la gráfica de la función logarítmica cambiando la posición de las variables x e y en la gráfica de la función exponencial. Esto se logra mediante un giro de la figura alrededor de la bisectriz del primero y tercer cuadrante hasta conseguir que el eje YY' tome la posición de XX', y viceversa.

Si hacemos esta operación con las figuras 59 y 60 antes obtenidas, resultarán las figuras 61 y 62, representativas de las funciones logarítmicas $y = \log_2 x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Para conformarnos con la expresión $y = \log_a x$, las letras de los ejes no cambian de lugar.

Estas mismas figuras se pueden también obtener directamente hallando las correspondientes tablas de valores de las funciones $y = \log_2 x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

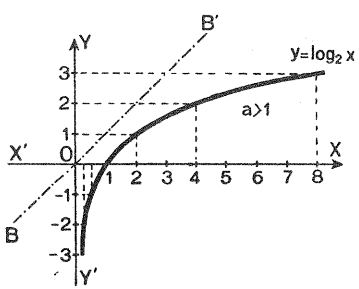


FIG. 61

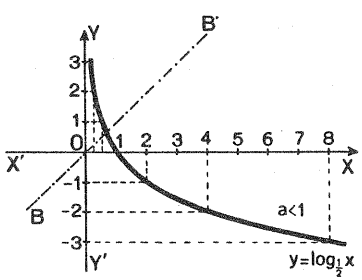


FIG. 62

Formemos, por ejemplo, la tabla para representar $y = \log_2 x$:

Para $x = 0$, $y = \log_2 0 = -\infty$ ya que $2^{-\infty} = \dfrac{1}{2^{\infty}} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

Para $x = \frac{1}{4}$, $y = \log_2 \frac{1}{4} = -2$ ya que $2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

Para $x = \frac{1}{2}$, $y = \log_2 \frac{1}{2} = -1$ ya que $2^{-1} = \frac{1}{2}$

Para $x = 1$, $y = \log_2 1 = 0$ ya que $2^0 = 1$

Para $x = 2$, $y = \log_2 2 = 1$ ya que $2^1 = 2$

Para $x = 4$, $y = \log_2 4 = 2$ ya que $2^2 = 4$

Para $x = 8$, $y = \log_2 8 = 3$ ya que $2^3 = 8$

Para $x = \infty$, $y = \log_2 \infty = \infty$ ya que $2^{\infty} = \infty$

TABLA DE VALORES

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	∞
$y = \log_2 x$	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	3	∞

Llevando estos pares de valores sobre dos ejes cartesianos, se obtendría, como hemos dicho, la figura 61.

83. Propiedades de la función logarítmica. — De la observación de la anterior tabla de valores, se deducen las siguientes propiedades:

1.ª *El logaritmo de la unidad es cero, ya que* $a^0 = 1$.

2.ª *El logaritmo de la base es la unidad, ya que* $a^1 = a$.

3.ª *Los números negativos no tienen logaritmo.*

Además, suponiendo que la base es mayor que 1, resulta:

4.ª *Cuando el número crece desde* 0 *hasta* ∞, *su logaritmo crece desde* $-\infty$ *hasta* ∞.

5.ª *Los logaritmos de los números positivos mayores que la unidad, son positivos.*

6.ª *Los logaritmos de los números positivos menores que la unidad, son negativos.*

84. Logaritmo de un producto. — *Es igual a la suma de los logaritmos de los factores.*

Sea $\log_a x = y$, lo cual significa que $a^y = x$

» $\log_a x' = y'$, » » » » $a^{y'} = x'$

» $\log_a x'' = y''$, » » » » $a^{y''} = x''$

Multiplicando m. a m. las igualdades de la derecha, resulta:

$$a^{y+y'+y''} = xx'x''$$

luego, según la definición de logaritmo,

$$y + y' + y'' = \log_a (xx'x'')$$

e invirtiendo y sustituyendo:

$$\log_a (xx'x'') = \log_a x + \log_a x' + \log_a x''$$

85. Logaritmo de un cociente. — *Es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.*

Sea $\log_a x = y$, lo cual significa que $a^y = x$
» $\log_a x' = y'$, » » » » $a^{y'} = x'$

Dividiendo m. a m. las dos igualdades de la derecha, se obtiene:

$$a^{y-y'} = \frac{x}{x'}; \text{ luego, } \log_a \frac{x}{x'} = y - y' = \log_a x - \log_a x'$$

$$\log_a \frac{x}{x'} = \log_a x - \log_a x'$$

86. Logaritmo de una potencia. — *Es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base.*

Sea $\log_a x = y$, lo que equivale a $a^y = x$.

Elevando los dos miembros de la última igualdad a la potencia enésima:

$$a^{yn} = x^n; \text{ luego, } \log_a x^n = ny = n \cdot \log_a x$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

87. Logaritmo de una raíz. — *Es igual al logaritmo de la cantidad subradical dividido por el índice de la raíz.*

Sea $\log_a x = y$, lo que equivale a $a^y = x$.

Extrayendo la raíz enésima de la última igualdad:

$$a^{\frac{y}{n}} = \sqrt[n]{x}; \text{ luego, } \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{y}{n} = \frac{\log_a x}{n}$$

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{\log_a x}{n}}$$

EJERCICIOS

99. Hallar x en las siguientes igualdades:

a) $\log_5 x = 2$ *c)* $\log_4 x = \frac{1}{2}$ *e)* $\log_9 x = 1$ *g)* $\log x = -3$
b) $\log_6 x = 3$ *d)* $\log x = 0$ *f)* $\log_4 x = -2$ *h)* $\log_8 x = \frac{1}{3}$

100. Calcular los logaritmos que se indican:

a) $\log_6 36$ *c)* $\log_4 2$ *e)* $\log_6 216$ *g)* $\log_9 3$
b) $\log_2 32$ *d)* $\log 100$ *f)* $\log_{100} 10.000$ *h)* $\log_8 \frac{1}{8}$

101. Hallar el valor de a en las siguientes igualdades:

a) $\log_a 16 = 2$ *d)* $\log_a 9 = \frac{1}{2}$ *g)* $\log_a 0'001 = -3$
b) $\log_a 125 = 3$ *e)* $\log_a 3 = \frac{1}{3}$ *h)* $\log_a 0'0001 = -2$
c) $\log_a 1.000 = 3$ *f)* $\log_a 10 = \frac{1}{4}$ *i)* $\log_a 2.197 = 3$

102. Expresar en forma exponencial las igualdades siguientes:

a) $\log_5 25 = 2$ *d)* $\log_2 \frac{1}{4} = -2$ *g)* $\log 0'001 = -3$
b) $\log_3 27 = 3$ *e)* $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$ *h)* $\log_{100} 0'0001 = -2$
c) $\log_4 64 = 3$ *f)* $\log_{10.000} 10 = \frac{1}{4}$ *i)* $\log_{11} 1.331 = 3$

103. Hallar el resultado de las siguientes expresiones:

a) $\log_2 8 + \log_3 27 + \log_5 125$ *c)* $\log_6 36 + \log_{36} 6 + \log_6 6$
b) $\log 100 + \log 0'01 + \log 0'1$ *d)* $2 \log_4 16 - 3 \log_7 49 + \log_2 32$
e) $\log 100 - 5 \log 1.000 + 10 \log 1 - 4 \log 0'01$
f) $\log 0'10 + 7 \log 10 - 5 (\log 100 - 3 \log 0'001)$

104. Calcular el resultado de las siguientes operaciones, tomando logaritmos en el sistema de base 2 y hallando luego el antilogaritmo correspondiente:

a) $2 \times 8 \times 16$ *c)* 8^3 *e)* $\sqrt[3]{\frac{1}{512}}$
b) $256 : 32$ *d)* $\sqrt[5]{1024}$

105. Las expresiones *b), e)* y *f)* del ejercicio 103 provienen de haber tomado logaritmos en otras expresiones. Reconstruirlas.

14. Los logaritmos decimales

88. Logaritmos decimales. — Ya dijimos que logaritmos decimales son aquellos cuya base es 10. Se emplean en casi todos los problemas numéricos, mientras que los logaritmos neperianos se prefieren en los problemas de carácter teórico.

89. NÚMEROS CUYO LOGARITMO DECIMAL ES UN NÚMERO ENTERO. — Observando la siguiente tabla se deduce que, en el sistema de logaritmos decimales, tienen por logaritmo un número entero, los números positivos formados por la unidad seguida de ceros y sus recíprocos.

$N =$	10^x	LOGARITMOS
.....	.....	.....
1,000.000	10^6	6
100.000	10^5	5
10.000	10^4	4
1.000	10^3	3
100	10^2	2
10	10^1	1
1	10^0	0
0'1	10^{-1}	-1
0'01	10^{-2}	-2
0'001	10^{-3}	-3
0'000.1	10^{-4}	-4
0'000.01	10^{-5}	-5
0'000.001	10^{-6}	-6
.....	.....	.....

90. CARACTERÍSTICA Y MANTISA DE UN LOGARITMO. — Los logaritmos decimales de los números que no son potencias enteras, positivas o negativas, de 10, constan de parte entera y parte decimal. La parte entera se llama *característica;* la decimal, *mantisa.*

Sea, por ejemplo, el número 218, que está comprendido entre dos potencias de 10:

$$10^2 < 218 < 10^3$$

Tomando logaritmos, según la definición (núm. 80), resulta:

$$2 < \log 218 < 3$$

lo que indica que el logaritmo de 218 es un número decimal comprendido entre 2 y 3.

91. TRANSFORMACIÓN DE UN LOGARITMO NEGATIVO. — Dijimos (número 83) que cuando un número es menor que la unidad, su logaritmo es negativo. Ahora bien: como los logaritmos de mantisa negativa no son cómodos para el cálculo, se les transforma en otros iguales de característica negativa y mantisa positiva.

Así, por ejemplo, el logaritmo $-2'957817$, que equivale a $-2-0'957817$, no varía si le sumamos $+1$ y -1, y haciéndolo del modo que se indica se habrá logrado lo que se pretendía:

$$-2-1+1-0'957817=(-2-1)+(1-0'957817)=-3+0'042183$$

El resultado obtenido se acostumbra a escribir así: $\bar{3}'042183$, es decir, se coloca el signo $-$ encima de la característica, para expresar que solamente ella es negativa.

Podemos, pues, enunciar la siguiente

REGLA. — *Para transformar un logaritmo de característica y mantisa negativas en otro equivalente de característica negativa y mantisa positiva, se suma una unidad negativa a la característica, encima de la cual se pone el signo menos, y luego se suma una unidad positiva a la mantisa.*

Esto último equivale a restar la mantisa de la unidad, operación que se abrevia restando de 10 la última cifra significativa, y las demás, de 9.

92. VARIACIÓN DEL LOGARITMO DE UN NÚMERO CUANDO ÉSTE SE MULTIPLICA O DIVIDE POR LA UNIDAD SEGUIDA DE CEROS. — *La mantisa del logaritmo de un número no varía al multiplicar, o dividir, el número por la unidad seguida de ceros, pero la característica aumenta, o disminuye, en tantas unidades como ceros sigan a la unidad.*

En efecto: Sea el número 732 cuyo logaritmo es 2'864511. Multiplicando por ejemplo por 100 y tomando logaritmos, resulta:

$$\log(732\times100)=\log 732+\log 100=2'864511+2=4'864511.$$

Y si dividimos por 1000, se obtendría:

$$\log(732:1000)=\log 732-\log 1000=2'864511-3=-0'135489=\bar{1}'864511.$$

93. Característica de los logaritmos positivos. — Sabemos (núm. 83) que a los números positivos *mayores que la unidad* les corresponden logaritmos positivos.

Damos aquí la regla para hallar la característica de estos logaritmos.

La característica de un número mayor que la unidad consta de tantas unidades positivas como cifras enteras tenga el número, menos una.

En efecto: Sea, por ejemplo, el número 497'538 y tratemos de hallar la característica de su logaritmo. Tenemos:

$$100 < 497'538 < 1000, \text{ o sea, } 10^2 < 497'538 < 10^3$$

y tomando logaritmos: $2 < \log\ 497'538 < 3$

luego, la característica que buscamos será 2.

Análogamente, tratándose del número 6, tendríamos:

$$1 < 6 < 10, \text{ y tomando logaritmos, } 0 < \log\ 6 < 1$$

luego, la característica de log 6 es 0.

94. Característica de los logaritmos negativos. — Sabemos igualmente (núm. 83) que a los números positivos *menores que la unidad* les corresponden logaritmos negativos.

La característica de un número menor que la unidad, consta de tantas unidades negativas como indica el orden que ocupa la primera cifra significativa después de la coma.

En efecto: Sea, por ejemplo, el número 0'000421. Por hallarse comprendido entre 0'001 y 0'0001, podemos escribir:

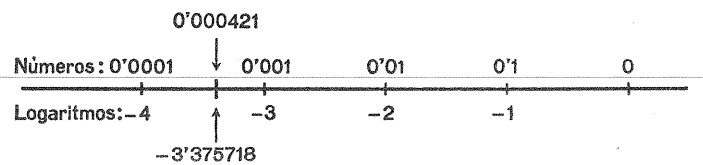
$$0'001 > 0'000421 > 0'0001, \text{ o sea, } 10^{-3} > 0'000421 > 10^{-4}$$

y tomando logaritmos: $-3 > \log\ 0'000421 > -4$

Por consiguiente, el logaritmo de 0'000421 es negativo y comprendido entre -3 y -4. Constará, pues, de una parte entera, -3, y otra decimal, también negativa, que por las *tablas de logaritmos* sabemos que es $-0'375718$. Es decir:

$$\log\ 0'000421 = -3'375718,$$

como se aclara en el adjunto esquema.



Ahora bien: según la regla dada en el núm. 92,

$$\log\ 0'000421 = -3'375718 = \bar{4}'624282.$$

Luego, en definitiva, la característica consta de tantas unidades negativas como indica el orden que ocupa la primera cifra significativa del número dado, después de la coma.

95. Obtención de la mantisa: Tablas de logaritmos. — La operación de hallar las mantisas o parte decimal de los logaritmos, resulta algo difícil. De ahí que se encuentren ya calculadas en las llamadas *tablas de logaritmos,* o sea fácil deducirlas de las que allí se hallan. Por costumbre, al dar la mantisa en las tablas se suele omitir la coma decimal.

La aproximación con que se hallan calculadas las mantisas, es distinta según las tablas. Las tablas más corrientes son las de cuatro, cinco y seis decimales, pero existen también otras en las que las mantisas se dan con siete, nueve y hasta trece cifras decimales.

Asimismo es variable el *límite* o número de mantisas dado por las tablas: las de cuatro decimales suelen dar las mantisas de los 1.000 primeros números; las de cinco decimales comprenden las de los 10.000 primeros números, y el límite de aquellas cuya aproximación es superior a cinco decimales es 20.000, 30.000, 108.000, o mayor.

Ordinariamente, las tablas de logaritmos están dispuestas a doble entrada, como la tabla de multiplicar de Pitágoras.

He aquí los dos problemas que se presentan en el manejo de las tablas de logaritmos:

PROBLEMA DIRECTO: Dado un número, hallar su logaritmo.

a) *El número está contenido en las tablas.*
b) *El número no está contenido en las tablas.*

PROBLEMA INVERSO: Dado un logaritmo, hallar su antilogaritmo, es decir, el número que le corresponde.

a) *La mantisa del logaritmo dado está en las tablas.*
b) *La mantisa del logaritmo dado no está en las tablas.*

96. Hallar el logaritmo de un número contenido en las tablas. — El problema no ofrece dificultad. Suponiendo que manejamos tablas que llegan hasta el número 20.000, procederemos así:

1.° Si el número (considerado como entero), es menor que 2.000, se buscará directamente en la columna *N* de la página de izquierda, y una vez expresada su característica, se escriben las cifras de la mantisa, las cuales se encuentran enfrente en la columna Log 0.

2.° Si el número (considerado como entero), está comprendido entre 2.000 y 20.000, sepárese la última cifra; búsquense las restantes en la co-

lumna N y sígase la fila en que se encuentren hasta la columna encabezada por la cifra separada, en donde se hallarán las 4 últimas cifras de la mantisa; las dos primeras (comunes a varios números) se encontrarán en la columna Log 0 o Log 5.

97. Fórmulas de interpolación. — Si el número cuyo logaritmo hemos de hallar, es superior al límite de la tabla, es decir, al mayor número contenido en ella (20.000 en las de Vázquez Queipo; 30.000 en las de Sánchez Ramos), no será posible encontrar directamente su logaritmo. Habremos de hacerlo por *interpolación*, es decir, que a partir de los logaritmos correspondientes a dos números consecutivos de las tablas, hallaremos el de un tercero comprendido entre ellos.

Supongamos que se trata de hallar el logaritmo de 1.087.753, y que manejamos unas tablas cuyo límite llega hasta 20.000.

Separemos de la derecha del número dado las cifras decimales necesarias para formar el número 10.877'53, que está comprendido entre dos números consecutivos de las tablas, el 10.877 y el 10.878.

Antes de seguir adelante, vamos a definir tres conceptos que necesitamos para determinar las fórmulas de interpolación. Son éstos:

1.º DIFERENCIA TABULAR. — *Es la diferencia entre dos mantisas consecutivas de las tablas; la representaremos por* D. Cuando la dan las tablas, aparece en una columna encabezada por esta letra, o por la abreviatura dif.

En el ejemplo, D = mantisa de 10.878 − mantisa de 10.877.

2.º EXCESO NUMÉRICO. — *Es la parte decimal separada del número que nos dan para obtener un número entero contenido en las tablas; lo representaremos por* h.

En el ejemplo propuesto, $h = 0'53$.

3.º EXCESO LOGARÍTMICO. — *Es la diferencia entre la mantisa de un logaritmo dado que no se halla en las tablas y la mantisa inmediata inferior contenida en las tablas; lo representaremos por* d.

Dentro de ciertos límites se admite que *las variaciones de los números son directamente proporcionales a las de sus logaritmos.* Según esto, podemos establecer la siguiente regla de tres:

Si al diferenciarse dos números en 1, sus logaritmos se diferencian en D,
al diferenciarse los números en h, sus logaritmos se diferenciarán en d.

Formando la proporción

$$\frac{1}{h} = \frac{D}{d}$$

se deducen las fórmulas

$$\boxed{d = h \cdot D} \quad [1] \qquad \text{y} \qquad \boxed{h = \frac{d}{D}} \quad [2]$$

98. Mantisas de logaritmos de los números no comprendidos en las tablas. — Como en el párrafo anterior, supongamos el número 1087753 y continuemos hallando su logaritmo. Lo único que ofrece dificultad es el cálculo de la mantisa, puesto que la característica la determinamos directamente aplicando la regla dada en el núm. 93; en este caso es 6.

Recordemos también (núm. 92) que la mantisa de 1087753 coincide con la de 10877'53. Pero la mantisa de este número 10877'53, es igual a la de 10877, que encontramos en las tablas, más el exceso logarítmico (d). El sumando d se calcula por la fórmula [1]: $d = h \cdot D$, en la que h es conocido ($h = 0'53$), y D lo dan las tablas o se halla fácilmente.

De acuerdo con esto, tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{mantisa de log } 10878 = 036549 \\ \text{mantisa de log } 10877 = 036509 \\ \text{dif. tabular:} \qquad D = \quad 40 \end{array}\right\} \; d = h \cdot D = 0'53 \times 40 = 21'20$$

La parte decimal de este resultado se desprecia, cuidando sin embargo de añadir una unidad a la parte entera, cuando la primera cifra decimal sea 5, o superior a 5.

Luego,

mantisa de log 10877'53 = 036509 + 21 = 036530 = mantisa de log 1087753.

Por tanto, log 1.087.753 = 6'036530.

EJEMPLO 2.º — Hallar el logaritmo de 0'00135792.

Dispondremos así las operaciones:

$$\begin{array}{l} \text{mantisa de log } 13579 \;\; = 132868 \\ d = h \cdot D = 0'2 \times 32 \;\; = \quad 6 \\ \text{mantisa de log } 13579'2 = 132874 \end{array}$$

$$\log 0'00135792 = \bar{3}'132874$$

99. Antilogaritmos. — Ya dijimos que por *antilogaritmo* se entiende el número que corresponde a un logaritmo.

I. HALLAR EL ANTILOGARITMO DE UN LOGARITMO CUYA MANTISA SE ENCUENTRA EN LAS TABLAS.

1.° Se busca la mantisa dada en las tablas. Las 3 ó 4 cifras con que comienza la fila en que dicha mantisa se encuentra, seguidas de la que encabeza la columna correspondiente, serán las cifras de que constará el número pedido.

2.° Por las unidades de la característica se deducirá cuántas cifras enteras posee el número en cuestión, o el lugar en donde ha de colocarse la coma de los decimales.

II. HALLAR EL ANTILOGARITMO DE UN LOGARITMO CUYA MANTISA NO SE ENCUENTRA EN LAS TABLAS. — Este problema, como el del párrafo 98, se resuelve por interpolación. Admitimos, como entonces, que *el aumento del logaritmo es directamente proporcional al que corresponde al número.*

EJEMPLO 1.° — Hallar el antilogaritmo de 6'036530.

Como la mantisa de este logaritmo no se halla en las tablas, buscaremos la más próxima inferior, *empezando por el final de las tablas,* y anotaremos las cifras del antilogaritmo que le corresponde.

El antilogaritmo que nosotros buscamos llevará esas mismas cifras, y a continuación las del exceso numérico h, que hemos de hallar. Recordemos que su fórmula es

$$h = \frac{d}{D}$$

Según esto, tendremos:

mantisa dada ..... = 036530	mantisa superior (tablas) = 036549
mantisa inferior (tablas) = 036509	mantisa inferior (tablas) = 036509
exceso logarítmico, d = 21	dif. tabular, D = 40

$$h = \frac{d}{D} = \frac{21}{40} = 0'5$$

OBSERVACIÓN. — Este cociente se calcula con dos cifras decimales cuando el divisor tiene tres cifras, y con una sola cuando tiene dos, como ocurre en este caso.

Las cifras del antilogaritmo buscado serán 10877, que nos dan las tablas para la mantisa más próxima inferior, y un 5 a continuación, correspondiente al valor obtenido para h. La característica dada nos dirá

si hay que añadir ceros o separar decimales en el número que resulte. En este caso, como es 6, añadiremos un cero para completar las 7 cifras que ha de tener el número pedido; luego,

$$\text{antilog } 6'036530 = 1.087.750$$

EJEMPLO 2.º—Hallar el antilogaritmo de $\bar{3}'132874$.

Dispondremos así las operaciones:

$$\text{antilog } \bar{3}'132868 \ldots\ldots\ldots\ldots = 0'0013579$$

$$h = \frac{d}{D} = \frac{132874 - 132868}{32} = \frac{6}{32} = 0'1$$

$$\text{antilog } \bar{3}'132874 = 0'00135791$$

EJERCICIOS

106. Convertir los siguientes logaritmos negativos en otros equivalentes de característica negativa y mantisa positiva:

$-2'254193$, $-0'819912$, $-4'312743$, $-1'299154$.

Hallar el logaritmo de los números siguientes:

107. 234, 654, 795, 836, 191, 345, 3.450, 34'50, 3'45, 0'0345.

108. 2, 0'2, 0'02, 0'002, 0'0002, 4, 40, 400, 4.000, 40.000.

109. 625, 15.625, 5'436, 893.712, 1.275.600.

110. 2.569'56, 103'555, 3.247'75, 4.938.365, 56.762'74.

111. 843'5725, 9'758496, 50.908, 0'0456, 0'000103.

112. 0'0000056823, 0'0000021, 0'26305, 2'83568, 0'00016585.

Hallar los números correspondientes o antilogaritmos de los logaritmos siguientes:

113. 1'982271
2'075547
3'292256
3'082785
0'903090

114. 4'995635
3'570543
4'579784
3'627366
5'133539

115. $\bar{1}'892651$
$\bar{2}'788168$
$\bar{3}'155336$
$\bar{4}'342423$
$\bar{5}'004321$

116. 2'824786
0'859447
$\bar{2}'879669$
$5'990258$
$\bar{3}'382754$

117. 0'987128
0'887121
$\bar{2}'357277$
2'007132
0'261875

118. 3'942123
0'434290
$\bar{6}'006472$
0'014940
$\bar{21}'685742$

15. Cálculo logarítmico

100. Cálculo logarítmico. — Según hemos visto en la lección 13, los logaritmos permiten calcular las multiplicaciones y divisiones mediante adiciones y sustracciones, y las potencias y raíces por medio de multiplicaciones y divisiones, respectivamente. Con ello se abrevia notablemente el cálculo, y aunque los resultados no sean ordinariamente del todo exactos, la aproximación obtenida es suficiente en la mayoría de los casos.

101. Cálculo de productos. — La aplicación de logaritmos al cálculo permite transformar la multiplicación en una adición.

EJEMPLO. — Hallar el valor de $x = 8475 \times 0'0937$.

Solución:

$$\log x = \log 8475 + \log 0'0937$$

$$\begin{aligned} \log 8475 &= 3'928140 \\ \log 0'0937 &= \bar{2}'971740 \\ \hline \log x &= 2'899880 \end{aligned}$$

$$x = \text{antilog } 2'899880 = 794'1$$

OBSERVACIÓN. — La adición de logaritmos se practica como una suma de números decimales, pero teniendo en cuenta que las mantisas son siempre positivas, mientras que las características pueden ser unas positivas y otras negativas. En el ejemplo precedente, al sumar las mantisas se ha obtenido 0'899880 y una unidad que, sumada con las características, ha dado

$$1 + 3 + (-2) = 1 + 3 - 2 = 2.$$

102. Cálculo de cocientes. — El empleo de los logaritmos permite transformar la división en una sustracción.

EJEMPLO. — Hallar el valor de $x = 0'0961 : 6'945$.

Solución:

$$\log x = \log 0'0961 - \log 6'945$$

$$\begin{aligned} \log 0'0961 &= \bar{2}'982723 \\ \log 6'945 &= 0'841672 \\ \hline \log x &= \bar{2}'141051 \end{aligned}$$

$$x = \text{antilog } \bar{2}'141051 = 0'0138373$$

103. Cologaritmo de un número. — Se llama *cologaritmo* de un número N al logaritmo de su recíproco $\frac{1}{N}$. Se escribe colog N. Es decir, por definición se tiene:

$$\operatorname{colog} N = \log \frac{1}{N} = \log 1 - \log N = -\log N$$

En consecuencia, *el cologaritmo de un número* N *es igual a menos el logaritmo de ese mismo número.* Pero hay que tener presente, según el convenio adoptado, que la mantisa del cologaritmo ha de ser positiva. En los siguientes ejemplos se verá cómo ha de procederse para el cálculo del cologaritmo.

EJEMPLO 1.° — Hallar el cologaritmo de 596'4.

Solución:

$$\begin{aligned}\operatorname{colog}\ 596'4 &= -\log\ 596'4 = -2'775538 = \\ &= -2 - 1 + 1 - 0'775538 = \bar{3}'224462\end{aligned}$$

EJEMPLO 2.° — Hallar el cologaritmo de 0'00961.

Solución:

$$\begin{aligned}\operatorname{colog}\ 0'00961 &= -\log\ 0'00961 = -\bar{3}'982723 = \\ &= -\bar{3} - 1 + 1 - 0'982723 = 2'017277\end{aligned}$$

REGLA. — *Para hallar el cologaritmo de un número, se calcula primero el logaritmo de ese número; a la característica de este logaritmo se añade una unidad positiva, y a la suma que resulte se le cambia de signo, con lo cual se obtiene la característica del cologaritmo. La mantisa se calcula restando de* 1 *la mantisa del logaritmo.*

Esta sustracción que nos da la mantisa del cologaritmo se efectúa con rapidez, restando de 10 la última cifra significativa de la mantisa del logaritmo y de 9 las restantes cifras.

104. Uso del cologaritmo. — Teniendo en cuenta lo dicho sobre el cologaritmo, vemos que

$$\log \frac{a}{N} = \log a - \log N = \log a + \operatorname{colog} N$$

Es decir, que el uso del cologaritmo evita la sustracción de logaritmos y es particularmente ventajoso su empleo cuando se trata de calcular fracciones en cuyo denominador figuran dos o más factores.

EJEMPLO. — Hallar el valor de $x = \dfrac{9'05 \times 72'3}{36'1 \times 1'42}$

Solución:

$$\log x = \log 9'05 + \log 72'3 + \operatorname{colog} 36'1 + \operatorname{colog} 1'42$$

$$\begin{aligned} \log 9'05 &= 0'956649 \\ \log 72'3 &= 1'859138 \\ \operatorname{colog} 36'1 &= \bar{2}'442493 \\ \operatorname{colog} 1'42 &= \bar{1}'847712 \\ \log x &= 1'105992 \\ x &= 12'7641 \end{aligned}$$

105. Cálculo de potencias y raíces. — Merced al empleo de logaritmos, el cálculo de una potencia se reduce a una multiplicación.

EJEMPLO. — Calcular $x = (4'32)^5$

Solución:

$$\begin{aligned} \log x &= 5 \log 4'32 \\ \log 4'32 &= 0'635484 \\ \log x &= 5 \times 0'635484 = 3'177420 \\ x &= \operatorname{antilog} 3'177420 = 1.504'6 \end{aligned}$$

Por otra parte, la extracción de raíces se transforma en una división gracias al empleo de logaritmos.

EJEMPLO 1.° — Calcular por logaritmos $x = \sqrt[3]{524}$

Solución:

$$\log x = \frac{\log 524}{3} = \frac{2'719331}{3} = 0'906443$$

$$x = \operatorname{antilog} 0'906443 = 8'062$$

EJEMPLO 2.° — Calcular $x = \sqrt[3]{0'0563}$

Solución:

$$\log x = \frac{\log 0'0563}{3} = \frac{\bar{2}'750508}{3}$$

Si dividimos $\bar{2}'750508$ por 3, tal como está indicado, nos veríamos expuestos a confundir la característica negativa con la mantisa positiva. Esta dificultad se

evita fácilmente *sumando a la característica el número de unidades negativas que sea suficiente para obtener un múltiplo del divisor, lo que equivale a restarlas del logaritmo; para que éste no varíe, se añade luego el mismo número de unidades positivas a la mantisa. Las expresiones obtenidas, divididas por el divisor, dan cocientes que son, respectivamente, la característica y la mantisa del logaritmo que resulta.* Según esto, tendremos:

$$\log x = \frac{\bar{2}'750508}{3} = \frac{\bar{3} + 1'750508}{3} = \bar{1} + 0'583502 = \bar{1}'583502$$

$$x = \text{antilog } \bar{1}'583502 = 0'383267$$

106. Cálculo de expresiones monomias. — Para calcular una expresión monomia en la que se dan simultáneamente productos, cocientes, potencias o raíces, aplicaremos sucesivamente las reglas anteriores.

EJEMPLO 1.° — Calcular $x = \sqrt[3]{\frac{2'38 \times 0'657}{3'14}}$

Solución:

$$\log x = \frac{\log 2'38 + \log 0'657 + \text{colog } 3'14}{3} = \frac{0'376577 + \bar{1}'817896 + \bar{1}'503070}{3} =$$

$$= \frac{\bar{1}'697543}{3} = \frac{-3 + 2'697543}{3} = \bar{1}'899181$$

$$x = \text{antilog } \bar{1}'899181 = 0'79283.$$

EJEMPLO 2.° — Calcular $x = \frac{-0'75 \times \sqrt[4]{108}}{(-0'057)^2 \times 0'002869}$

Observemos que en este ejemplo hay números afectados del signo *menos*. Como dijimos que los números negativos no tienen logaritmo real, se presenta aquí una aparente dificultad. Sin embargo, en tales casos, sin fijarnos en los signos menos, operaremos con los valores absolutos de los números y afectaremos luego al resultado del signo que le corresponda. Así, en el ejemplo propuesto, el siguiente esquema nos da el signo final:

$$\frac{(-1) \times (+1)}{(-1)^2 \times (+1)} = \frac{-1}{+1} = -1$$

Designemos por x' el valor absoluto de la expresión dada y tomemos logaritmos:

$$x' = \frac{0'75 \times \sqrt[4]{108}}{(0'057)^2 \times 0'002869}$$

$$\log x' = \log 0'75 + \frac{\log 108}{4} + 2 \operatorname{colog} 0'057 + \operatorname{colog} 0'002869 =$$

$$= \bar{1}'875061 + \frac{2'033424}{4} + 2 \times 1'244125 + 2'542269 = 5'413936;$$

$$x' = 259.379. \qquad \text{Luego,} \quad x = -259.379.$$

107. Ecuaciones exponenciales. — *Se llaman ecuaciones exponenciales aquellas en las que la incógnita aparece como exponente.* Ejemplo: $5^{2x+1} = 12$.

El método más frecuente para resolverlas es el de tomar logaritmos en los dos miembros. Así, en el ejemplo resulta:

$$(2x+1)\log 5 = \log 12; \qquad 2x + 1 = \frac{\log 12}{\log 5}$$

$$x = \frac{\dfrac{\log 12}{\log 5} - 1}{2} = \ldots \text{ (hállese)}$$

Algunas ecuaciones preparadas pueden resolverse sin tomar logaritmos, acudiendo para ello a la descomposición factorial de la base u otros números que aparezcan en la ecuación. Sea, por ejemplo, resolver $8^{x-1} = \sqrt{2}$.

Esta ecuación equivale a $2^{3(x-1)} = 2^{\frac{1}{2}}$, y por ser potencias iguales de la misma base, tendremos que sus exponentes han de ser iguales. Es decir:

$$3(x-1) = \frac{1}{2} \quad \text{de donde} \quad x = \frac{7}{6}$$

Al resolver las ecuaciones exponenciales es necesario acudir a menudo a artificios de cálculo. Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1.º — Resolver $5^x + 5^{1-x} = 6$.

Multiplicando por 5^x a los dos miembros, tenemos:

$$5^{2x} + 5 = 6 \cdot 5^x \quad \text{o sea} \quad 5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

Tomando como incógnita 5^x, resulta la ecuación cuadrática

$$(5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

y llamando y a 5^x, se tiene

$$y^2 - 6y + 5 = 0 \quad \text{de donde} \quad y' = 5 \quad \text{e} \quad y'' = 1$$

Para $5^x = 5$ resulta $x = \mathbf{1}$, y para $5^x = 1$ se obtiene $x = \mathbf{0}$.

EJEMPLO 2.º — Resolver $4^{x+1} + 2^{x+3} = 320$.

La ecuación dada es equivalente a

$$4 \cdot 4^x + 2^3 \cdot 2^x = 320 \quad \text{o sea} \quad 4 \cdot 2^{2x} + 8 \cdot 2^x = 320$$

y haciendo $y = 2^x$, resulta

$$4y^2 + 8y - 320 = 0 \quad \text{o, simplificando,} \quad y^2 + 2y - 80 = 0$$

de donde $y' = 8$ e $y'' = -10$.

Para $2^x = 8 = 2^3$ se obtiene $x = \mathbf{3}$. La solución $2^x = -10$ es inadmisible, ya que 2^x es necesariamente positivo.

EJEMPLO 3.º — Resolver el sistema $\begin{cases} 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^{y+1} = 807 \\ 15 \cdot 5^{x-1} - 6^y = 339 \end{cases}$

El sistema propuesto equivale a

$$\begin{cases} 3 \cdot 5^x + 12 \cdot 6^y = 807 \\ 3 \cdot 5^x - 6^y = 339 \end{cases}$$

y restando miembro a miembro estas ecuaciones, resulta:

$$13 \cdot 6^y = 468 \quad \text{de donde} \quad 6^y = 36 = 6^2; \quad y = \mathbf{2}$$

Sustituyendo y por este valor en una de las ecuaciones, se obtiene $x = \mathbf{3}$.

108. Ecuaciones logarítmicas. — *Son aquellas en las que la incógnita figura bajo la operación del logaritmo.*

Ordinariamente se resuelven tomando antilogaritmos en los dos miembros. Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1.º — Resolver la ecuación $\log (2x+2) + \log (x+3) = \log 6$.

Por ser la suma de logaritmos igual al logaritmo de un producto, se tiene:

$$\log [(2x+2)(x+3)] = \log 6$$

Tomando antilogaritmos, resulta

$$(2x+2)(x+3) = 6 \quad \text{de donde} \quad x' = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad x'' = \mathbf{-4}$$

EJEMPLO 2.º — Resolver $\dfrac{\log 2 + \log (11 - x^2)}{\log (5-x)} = 2$

Quitando denominadores, tenemos:

$$\log 2 + \log (11 - x^2) = 2 \log (5 - x)$$

ecuación que equivale a

$$\log 2 (11 - x^2) = \log (5 - x)^2$$

Tomando antilogaritmos, resulta

$$2 (11 - x^2) = (5 - x)^2 \quad \text{de donde} \quad x' = 3 \quad \text{y} \quad x'' = \frac{1}{3}$$

EJEMPLO 3.º — Resolver el sistema

$$\begin{cases} \log x = \log 2y + \log 6 - \log 3 \\ 2 \log x = 3 \log y - 2 \log y \end{cases}$$

Este sistema equivale a

$$\begin{cases} \log x = \log \dfrac{2y \times 6}{3} \\ \log x^2 = \log \dfrac{y^3}{y^2} \end{cases} \quad \text{de donde} \quad \begin{cases} x = \dfrac{2y \times 6}{3} = 4y \\ x^2 = \dfrac{y^3}{y^2} = y \end{cases}$$

y resolviendo el último sistema, resulta: $x = \frac{1}{4}$; $y = \frac{1}{16}$

EJERCICIOS

Calcular por logaritmos los productos siguientes:

119. 27'2 × 3'82
24'5 × 28'6
0'555 × 539
335 × 0'162
0'345 × 0'0679

120. 325'9 × 83'4
0'00562 × 0'821
7'414 × 0'943
3'141 × 225
4'86 × 369'2

121. 2'076 × 50'89
34'82 × 17'85
39'62 × 0'6592
0'53 × 0'72 × 7695
25'3 × 1'48 × 37'4

122. 0'000865 × 370 × 53'22
2 × 3'142 × 56'25
0'5 × 0'000003 × 376'54
0'927 × 468 × 6'05
0'0092 × 8754 × 2'68

Calcular los siguientes cocientes, empleando logaritmos:

123. 47'8 : 2'61
384 : 92
742 : 4'38

124. 3'21 : 2'15
0'816 : 24'7
45'8 : 1'733

125. 527'6 : 1'414
1'876 : 24'13
82'95 : 32'61

126. 0'5369 : 75'81

127. 0'3675 : 0'005928

128. 0'5785 : 0'3215

129. $\dfrac{6'14 \times 36}{28'3}$

130. $\dfrac{8'9 \times 7'63}{3'87}$

131. $\dfrac{0'746 \times 8'52}{0'0321}$

132. $\dfrac{32'5 \times 15'4}{35'6}$

133. $\dfrac{745 \times 40'02}{256 \times 12'5}$

134. $-\dfrac{16'52 \times 0'0826}{3'1416}$

135. $\dfrac{594 \times (-44'2) \times (-1325)}{(-22'7) \times 9'25}$

Calcular el valor de las siguientes potencias, empleando logaritmos:

136. $(18'9)^4$ $(2'15)^3$ $(0'765)^4$

137. $(1'03)^{12}$ $(1'045)^{20}$ $(5'05)^6$

138. $(565'9)^3$ $(-0'005328)^2$ $(-0'8942)^3$

Calcular el valor de las siguientes raíces, usando logaritmos:

139. $\sqrt{565}$ $\sqrt[4]{27'8}$ $\sqrt{0'273}$

140. $\sqrt[3]{0'856}$ $\sqrt[4]{0'945}$ $\sqrt{0'5072}$

141. $\sqrt[4]{0'001395}$ $\sqrt[5]{930'4}$ $\sqrt{0'002165}$

Calcular por logaritmos el valor de las siguientes expresiones:

142. $\dfrac{280'7}{42'1 \times 6'53}$

143. $\dfrac{57'2 \times 3'09}{4'59 \times 21'7}$

144. $\dfrac{9628}{33'2 \times 5'17}$

145. $\dfrac{72'48 \times 0'073}{8'92 \times (-21'45)}$

146. $\dfrac{27'5 \times 3'62}{1'83 \times 11'4}$

147. $\dfrac{(42'3)^3 \times 0'0135}{\sqrt[3]{136'7}}$

148. $\dfrac{(-0'1872)^3 \times 0'3467}{(-75'8) \times 0'00381}$

149. $\sqrt[4]{\dfrac{42'4 \times 0'075}{3'64 \times 0'009}}$

150. $\left(\dfrac{5'75 \times 3'428}{59'62 \times 48'08}\right)^{\frac{2}{3}}$

151. $\sqrt[5]{\left(\dfrac{0'07 \times 0'00964}{3'426 \times 0'875}\right)^2}$

Como ejercicio y aplicación del cálculo logarítmico, resolver los problemas siguientes:

152. La longitud de la circunferencia va expresada por la fórmula $C = 2\pi r$. Hallar la longitud de una circunferencia cuyo radio mide 57'44 cm.

153. El área del círculo va expresada por la fórmula $S = \pi r^2$. Hallar el área de un círculo cuyo radio mide 7'34 cm.

154. Hallar el área de un círculo cuyo diámetro mide 242'5 cm.

155. El área de la esfera viene expresada por la fórmula $S = 4\pi r^2$. Calcular el área de una esfera cuyo diámetro mide 8'736 cm.

156. El volumen de la esfera se expresa por la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Hallar el volumen de una esfera de radio $r = 16'6$.

157. Hallar el radio de un círculo cuya superficie es de 92 dm^2.

158. Hallar el radio de una esfera de 62 cm^3 de volumen.

159. En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Hallar la hipotenusa de un triángulo cuyos catetos miden 14 y 18 cm., respectivamente.

160. El área de un triángulo en función de sus lados viene dada por la fórmula $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, en la que a, b y c son los lados y $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Hallar el área de un triángulo cuyos lados miden 13, 16 y 21 cm.

161. El área de un triángulo equilátero en función del lado va expresada por la fórmula $S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Hallar S: *a)* cuando $l = 12$ cm.; *b)* cuando $l = 9'25$ cm.

162. Calcular el volumen de un cono cuyo radio mide 20 cm. y la altura, 18 centímetros. ($V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; $\pi = 3'142$).

163. La fórmula $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ da la longitud del radio de un círculo inscrito en el triángulo de lados a, b, c, siendo $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Hallar r, si $a = 11'5$ cm., $b = 12'4$ cm., $c = 15'7$ cm.

164. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 42'5 cm., y uno de los catetos, 18'7 cm. Calcular el otro cateto.

Véanse ejercicios sobre ecuaciones exponenciales y logarítmicas al final del libro.

16. Progresiones aritméticas

109. Sucesiones de números. — En el estudio de las Matemáticas encontramos frecuentemente grupos de tres o más números, elegidos de acuerdo con alguna ley y ordenados según un orden determinado, cuyas relaciones entre sí y con los demás números queremos estudiar.

De entre la variedad ilimitada que de tales grupos o sucesiones de números pueden darse, solamente estudiaremos dos de sus tipos más sencillos: las *progresiones aritméticas* y las *progresiones geométricas.*

110. Progresiones aritméticas. — *Recibe el nombre de progresión aritmética toda sucesión de números, tales que cada uno de ellos (excepto el primero) es igual al precedente sumado con un número constante, que se denomina diferencia (o razón) de la progresión.*

Cada uno de los números que forman la progresión se denomina *término* de la misma.

Por ser constante la diferencia entre cada dos términos consecutivos de una progresión aritmética, se llama a éstas también *progresiones por diferencia.*

Una progresión aritmética es *creciente* cuando la diferencia es positiva; y *decreciente* cuando la diferencia es negativa.

Los números 3, 8, 13, 18, ..., forman una progresión aritmética, puesto que cada término (excepto el primero) menos el que le precede, da siempre por diferencia 5. La progresión es, en este caso, creciente.

Igualmente, 16, 12, 8, 4, 0, -4, -8, ..., es una progresión aritmética, ya que al restar de cada término el que le precede se obtiene la diferencia común -4. Por ser negativa esta diferencia, la progresión será decreciente.

De igual modo, $\frac{1}{2}$, 3, $5\frac{1}{2}$, 8, ..., es una progresión aritmética cuya diferencia es $2\frac{1}{2}$. También 3, $3 + n$, $3 + 2n$, $3 + 3n$, ..., es una progresión aritmética de diferencia igual a n; y $3x + 1$, $2x$, $x - 1$, -2, $-x - 3$, ..., será una progresión aritmética de diferencia igual a $-x - 1$.

En una progresión aritmética se puede considerar un número determinado de términos, y se denomina entonces *limitada.* Cuando no se fija el número de términos, se dice que es *ilimitada.*

111. Notación. — Frecuentemente se representa una progresión aritmética separando sus términos con un punto y poniendo delante del primero el signo ÷. Así, la progresión

$$2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ \ldots$$

puede ir escrita también de este modo:

$$\div\ 2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 17 \cdot 22 \cdot \ldots$$

Para representar en forma general una progresión aritmética, es corriente emplear la misma letra afectada de un subíndice, que indica el lugar ocupado por el término que se considera. De este modo:

$$\div\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

112. Cálculo del término enésimo de una progresión aritmética. — En la siguiente representación simbólica de una progresión aritmética,

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d,\ a + 4d,\ \ldots$$

el coeficiente de d en el *segundo* término es 1, en el *tercer* término es 2, en el *cuarto*, 3, y así sucesivamente; es decir, en cada término, el coeficiente de d es *una unidad menor* que el número que expresa el orden del término. Por tanto, en el término *enésimo*, o general, el coeficiente de d será $n - 1$.

Según esto, podemos escribir:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\,d} \qquad [1]$$

Esta fórmula permite calcular el valor de un término cualquiera, cuando se conoce el primero y la diferencia de la progresión.

En ella, además, aparecen relacionadas cuatro cantidades, por lo cual podremos determinar una cualquiera de ellas cuando se conozcan las otras tres.

Así, tendremos:

$$\boxed{a_1 = a_n - (n-1)\,d} \qquad [2] \qquad \boxed{d = \frac{a_n - a_1}{n-1}} \qquad [3]$$

$$\boxed{n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1} \qquad [4]$$

EJEMPLO 1.º — Hallar el octavo término de la progresión

$$3, \quad 5, \quad 7, \ldots$$

Como $a_1 = 3, \quad d = 2, \quad$ y $\quad n = 8,$

la fórmula [1] da

$$a_n = 3 + 7 \cdot 2 = 17.$$

EJEMPLO 2.º — ¿Cuál es el primer término de una progresión aritmética que consta de 20 términos, si se sabe que el último es 83 y la diferencia 4?

De la fórmula [2], se obtiene

$$a_1 = 83 - 19 \cdot 4 = 83 - 76 = 7$$

EJEMPLO 3.º — Hallar la diferencia de una progresión aritmética que consta de 12 términos, siendo 6 el primero y 39 el último.

Aplicando la fórmula [3], se tiene

$$d = \frac{39 - 6}{12 - 1} = 3$$

EJEMPLO 4.º — ¿Cuántos términos tiene una progresión aritmética que empieza por 15 y termina por -90, si la diferencia es -3?

De la fórmula [4], resulta

$$n = \frac{-90 - 15}{-3} + 1 = 35 + 1 = 36 \text{ términos.}$$

113. Medios aritméticos. — Se llama *medio aritmético (o diferencial)* entre dos números dados a y b, a otro número c que forma con ellos una progresión aritmética de tres términos, siendo el primero a y el último b.

Asimismo, pueden intercalarse, o *interpolarse,* dos o más medios aritméticos entre dos números dados, formándose entonces una progresión aritmética de cuatro o más términos.

Así, 7 es un medio aritmético en la progresión aritmética 3, 7, 11. También $3n + 1$ y $4n + 2$ son medios aritméticos en la progresión aritmética $2n$, $3n + 1$, $4n + 2$, $5n + 3$.

114. Interpolación aritmética o diferencial. — *Interpolar* m *medios aritméticos (o diferenciales) entre dos números* a *y* b, *es formar una progresión aritmética de* m + 2 *términos cuyos extremos sean* a *y* b.

Para ello, bastará conocer la diferencia de dicha progresión.

La fórmula [3] da para este caso:

$$d = \frac{b-a}{(m+2)-1} = \frac{b-a}{m+1} \qquad [5]$$

EJEMPLO. — Interpolar 5 medios aritméticos entre 4 y 6.

Calculando la diferencia de la progresión, se obtiene:

$$d = \frac{6-4}{5+1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

La progresión será, por consiguiente:

$$4,\ 4\frac{1}{3},\ 4\frac{2}{3},\ 5,\ 5\frac{1}{3},\ 5\frac{2}{3},\ 6.$$

115. Teorema. — *Si entre cada dos términos consecutivos de una progresión aritmética se interpola el mismo número de medios aritméticos, se obtiene una nueva progresión aritmética formada por los términos de la anterior y los medios aritméticos interpolados.*

Si se toman dos términos consecutivos cualesquiera de la progresión

$$\div\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

por ejemplo, a_{n-1} y a_n, y se aplica la fórmula [5], resulta

$$d' = \frac{a_n - a_{n-1}}{m+1};$$

pero, por definición de progresión aritmética, es $a_n - a_{n-1} = d$; luego,

$$d' = \frac{d}{m+1}$$

Es decir, que la nueva diferencia d' no depende de los términos entre los cuales se hace la interpolación, y, por consiguiente, es la misma para todos ellos.

116. Suma de los términos equidistantes de los extremos. — *En toda progresión aritmética limitada, la suma de dos términos equidistantes de los extremos es igual a la suma de éstos.*

En la progresión

$$\div\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

si a_1 y a_n representan los términos extremos, a_{h+1} y a_{n-h} designarán, respectivamente, el término al que preceden h y el término al que siguen h,

por lo que, sumando miembro a miembro las siguientes igualdades, resulta:

$$\left.\begin{aligned} a_{h+1} &= a_1 + hd \\ a_{n-h} &= a_n - hd \end{aligned}\right\} \quad a_{h+1} + a_{n-h} = a_1 + a_n$$

como se quería demostrar.

117. Suma de los términos de una progresión aritmética limitada. — Sea la progresión de n términos

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$$

Representando por S la suma de los términos, tendremos

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \qquad [A]$$

La anterior igualdad puede también escribirse de este modo:

$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \qquad [B]$$

Sumadas miembro a miembro las igualdades [A] y [B], y agrupados en sumas parciales cada par de términos que ocupan el mismo lugar en una y otra, se obtiene:

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + \\ + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Como las sumas indicadas en los paréntesis corresponden a la de términos equidistantes de los extremos, podemos sustituir cada una de ellas por la suma de éstos (núm. 116).

Habiendo, además, tantas sumas parciales como términos tiene la progresión, o sea n, resulta:

$$2S = (a_1 + a_n)\,n, \quad \text{de donde,} \quad \boxed{S = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}} \qquad [6]$$

Es decir: *La suma de los términos de una progresión aritmética limitada es igual a la mitad del producto del número de términos por la suma de los extremos.*

118. Casos particulares. — Aplicando la fórmula [6] a algunas progresiones interesantes, tendremos:

1.ª *Suma de los* n *primeros números naturales.* — Los números naturales forman una progresión aritmética cuya diferencia es 1. Considerando únicamente los n primeros números, se obtiene la progresión

$$\div 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$$

La suma de los términos de esta progresión será

$$S = \frac{(1+n)\,n}{2}$$

EJEMPLO. — Hallar la suma de los 12 primeros números naturales.

Tendremos: $$S = \frac{(1+12)12}{2} = 78$$

2.ª *Suma de los* n *primeros números impares.* — El primer término de la progresión que forman es 1, el último $2n-1$, la diferencia 2, y la suma será

$$S = \frac{(1+2n-1)n}{2} = n^2$$

EJEMPLO. — Hallar la suma de los 9 primeros números impares.

Se tiene: $$n^2 = 9^2 = 81$$

3.ª *Suma de los* n *primeros números pares.* — El primer término de la progresión que forman es 2, el último $2n$, y la suma

$$S = \frac{(2+2n)n}{2} = (1+n)\,n$$

EJEMPLO. — Hallar la suma de los 17 primeros números pares.

Se tiene: $$S = (1+17)17 = 306$$

119. Observación. — Con las dos fórmulas fundamentales obtenidas para las progresiones aritméticas,

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1)d \\ S = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2} \end{cases}$$

se puede establecer un sistema de ecuaciones. En él hay cinco cantidades, a_1, a_n, n, d, S, ligadas entre sí. Por consiguiente, si conocemos tres de esas cantidades, podremos determinar las dos restantes.

EJEMPLO. — En una progresión aritmética cuyo primer término es 67 y la diferencia -6, la suma de los términos es 408. ¿Cuántos términos habrá y cuál será el valor del último?

Llamemos x al número de términos, e y al valor que tiene el último.

Podemos escribir el sistema

$$\begin{cases} y = 67 + (x-1)(-6) \\ 408 = \dfrac{(67+y)x}{2} \end{cases} \quad \text{o su equivalente} \quad \begin{cases} 6x + y = 73 \\ xy + 67x = 816. \end{cases}$$

Hallado el valor de y en la primera ecuación del último sistema y llevado a la segunda, ésta se convierte en

$$6x^2 - 140x + 816 = 0$$

que tiene por raíces 12 y $\frac{34}{3}$, de las cuales solamente la primera conviene por solución del problema.

Para $x = 12$, corresponde $y = 1$. Luego, el número de términos de la progresión será 12, y el valor del último 1.

NOTA. — Cuando n es una de las incógnitas, como sucede en el problema resuelto anteriormente, el valor hallado para él habrá de ser un número natural.

EJERCICIOS

165. Formar una progresión de 15 términos, siendo el primero 113 y la diferencia, -10.

166. Formar una progresión de 7 términos, que tenga 1.000 como primer término, y la diferencia sea -75.

167. Agréguense 5 términos a cada una de las progresiones siguientes:

$$\div\ 2\sqrt{a} \cdot 5\sqrt{a} \cdot 8\sqrt{a} \ldots; \quad \div\ -5\sqrt{x} \cdot -2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \ldots$$

168. Escribir los 5 primeros términos de la progresión en la que:

a) $a_1 = x - 3y$; $d = 2y$; b) $a_1 = x$; $d = x + 1$.

Hallar:

169. El 20.º término de la progresión $\div\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots$

170. El 8.º término de la progresión $\div\ 1\frac{3}{4} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \ldots$

171. El 16.º término de la progresión $\div\ \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} \ldots$

172. El 6.º término de la progresión $\div\ 5x^2 \cdot 3x^2 \cdot x^2 \ldots$

173. El 8.º término de la progresión $\div a \cdot \frac{5}{4}a \cdot \frac{3}{2}a \ldots$

174. ¿Qué término de la progresión $\div -51 \cdot -43 \cdot -35 \ldots$, es el que tiene por valor 205?

175. ¿Qué término de la progresión $\div 1'07 \cdot 1'14 \cdot 1'21 \ldots$, es el que tiene por valor 3'17?

176. Hallar la diferencia de una progresión cuyo primer término es 6, y el 27.º, 188.

177. Calcular la diferencia de una progresión cuyo primer término es 23, y el 72.º, 58'5.

178. Interpolar 4 medios diferenciales entre -14 y 16.

179. Interpolar 7 medios diferenciales entre 3 y -1.

180. Interpolar 8 medios diferenciales entre -10 y -28.

181. Interpolar 4 medios diferenciales entre $-\frac{5}{3}$ y -5.

Hallar el medio diferencial (promedio, o media aritmética) entre:

182. -7 y -5.

183. $a + b$ y $a - b$.

184. $2x + 4$ y $4x - 2$.

185. $\sqrt{3}$ y $\sqrt{27}$.

Hallar la suma de los primeros:

186. 15 términos de la progresión $\div 3 \cdot 7 \cdot 11 \ldots$

187. 12 términos de la progresión $\div -4 \cdot -2 \cdot 0 \ldots$

188. 25 números naturales.

189. 25 números impares.

190. 25 números pares.

191. Hallar la suma de todos los números naturales comprendidos entre 10 y 380, ambos inclusive.

192. Hallar la suma de los números pares comprendidos entre 2 y 50, ambos inclusive.

193. Calcular la suma de los múltiplos de 3 comprendidos entre 3 y 99, ambos inclusive.

194. Calcular la suma de los 83 primeros múltiplos de 3.

195. Hallar la suma de todos los múltiplos de 5 inferiores a 503 que sean positivos.

196. Hallar la suma de los múltiplos de 6 comprendidos entre -55 y 363.

197. Calcular la suma de los números pares comprendidos entre 1.045 y 7.351.

198. ¿Cuántos múltiplos de 7 hay entre 1.000 y 10.000? Hallar su suma.

199. ¿Cuántos múltiplos de 11 (positivos) hay que sean menores que 1.000? Hallar su suma.

200. Hallar la suma de los múltiplos positivos de 5 inferiores a 100.

En una progresión aritmética, se conocen:

201. $a_1 = 4$; $d = 2$; $n = 8$. — Hallar a_n y S.

202. $a_1 = 3$; $a_n = 21$; $S = 120$. — Hallar d y n.

203. $a_1 = 23$; $d = -2$; $S = 140$. — Hallar a_n y n.

204. $a_n = 20$; $d = 5$; $S = 20$. — Hallar a_1 y n.

205. $a_1 = 20$; $d = 2$; $S = 780$. — Hallar a_n y n.

206. La suma del 3.º y 4.º términos de una progresión aritmética es 12, y el sexto vale 1. Formar los 8 términos primeros de esa progresión.

207. La suma del 2.º y 9.º términos de una progresión aritmética es -8, y la suma del 5.º y 10.º términos es $-\frac{8}{3}$. Hallar el primer término.

208. En una progresión aritmética, el 11.º término excede en 2 al término 8.º, y entre el 1.º y el 9.º suman 6. Se desea hallar la diferencia y los términos mencionados.

209. Hallar 4 números en progresión aritmética, tales que la suma de los dos primeros sea -51, y la de los dos últimos sea 9.

210. La suma de tres números en progresión aritmética es 12, y su producto, 63. Averiguar esos números.

211. Las edades de cuatro hermanos suman 54 años y están en progresión aritmética. Sabiendo que la del mayor duplica a la del menor, hallar cuáles son esas edades.

212. Hallar tres números en progresión aritmética, cuya suma sea 6 y la de sus cuadrados, 62.

213. En una progresión aritmética cuyo primer término es 3, el 9.º es al 4.º como el 16.º al 7.º Formar esa progresión.

214. En una huerta hay plantados 100 árboles en hilera, distando 10 metros cada dos consecutivos. A 20 metros del primer árbol está el pozo que se utiliza para el riego. Averiguar el camino que habrá de recorrer el hortelano para echar un cubo de agua a cada árbol, suponiendo que al acabar deje el cubo en el pozo, donde estaba en un principio.

215. Un reloj da las horas sin repetición, y anuncia con un toque las medias horas. ¿Cuántos toques dará en total en las 24 horas del día?

216. Un reloj que da las horas con repetición, anuncia los cuartos de hora con un toque, las medias con dos y los tres cuartos con tres. ¿Cuántos toques da diariamente?

217. Calcular los lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus medidas, expresadas en metros, son números que están en progresión aritmética cuya diferencia es 7.

218. Un coronel dispone parte de su regimiento en triángulo, a saber: un soldado en la primera fila, 2 en la segunda, 3 en la tercera, y así sucesivamente, resultando un total de 231 hombres. ¿Cuántas filas tendrá ese triángulo?

219. Los ángulos de un triángulo rectángulo forman una progresión aritmética. ¿Cuáles son esos ángulos?

220. Un número está formado por tres cifras en progresión aritmética, siendo su suma igual a 15. Se sabe, además, que si se multiplica la cifra de las centenas por 129, se obtiene el número en cuestión. ¿Cuál es ese número?

221. Según enseña la Física, «*los espacios parciales recorridos en cada unidad de tiempo por un móvil animado de movimiento uniformemente acelerado, crecen como los números impares, 1, 3, 5, 7, etc.*». Sabiendo que un cuerpo que cae libremente en el espacio (movimiento uniformemente acelerado) recorre 4'905 metros en el primer segundo, hallar:

1.° El espacio que recorrerá en el octavo segundo.

2.° El camino total recorrido al cabo de 8 segundos.

222. En una parada militar, un conjunto formado por 7.260 soldados de infantería, recibe de su jefe la orden de colocarse en filas sucesivas, de tal modo, que cada fila cubriese exactamente los huecos de la fila anterior y que el conjunto formase un triángulo equilátero. Hallar el número de hombres que habrá de colocarse en la primera fila.

223. Escribir los n primeros múltiplos de a, sabiendo que su suma es 140, y que a es un factor de 10.

224. La suma de los cuatro primeros términos de una progresión aritmética es 2, y la suma de sus cuadrados, 46. Formar la progresión.

225. La mano de obra en la construcción de un pozo se ha contratado a razón de 15 pesetas por el primer metro, 20 pesetas por el segundo, 25 pesetas por el tercero, y así sucesivamente, aumentando 5 pesetas por cada metro que se avance, a causa de las dificultades del trabajo, que crecen con la profundidad. ¿Cuál será el coste de la construcción del pozo, si se sabe que tiene 41 metros de profundidad?

226. Interpolar dos medios aritméticos entre $\frac{1}{a-b}$ y $\frac{1}{a+b}$.

227. En una progresión aritmética, $a_1 = \frac{1}{a}$, $d = \frac{1}{b}$ y $n = 8$. Hallar a_n y S.

228. En la serie de los números impares, se forman los grupos siguientes:

$$1 \mid 3, 5 \mid 7, 9, 11 \mid 13, 15, 17, 19 \mid \ldots$$

tales, que el primer grupo contiene un número, el segundo dos, el tercero tres, y así sucesivamente. Se desea hallar la suma de los números contenidos en el $n$ésimo grupo.

17. Progresiones geométricas

120. Progresiones geométricas. — *Recibe el nombre de progresión geométrica toda sucesión de números, tales que cada uno de ellos (excepto el primero) es igual al precedente multiplicado por un número constante, llamado razón de la progresión.*

Los números que forman la progresión se denominan *términos* de la misma.

Por ser constante el cociente entre cada dos términos consecutivos de una progresión geométrica, se las llama también *progresiones por cociente.*

Si designamos por a el primer término y por r la razón, la progresión geométrica puede representarse por

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\ \ldots$$

Los números 2, 4, 8, 16,... forman una progresión geométrica, puesto que cada término (excepto el primero) dividido por el que le precede, da siempre por cociente 2.

Del mismo modo, 3, -15, 75, -375,... es una progresión geométrica cuya razón es -5.

Análogamente, 2, $-4\sqrt{5}$, 40, $-80\sqrt{5}$ forman una progresión geométrica de razón $r = -2\sqrt{5}$.

121. Notación. — Frecuentemente se representa una progresión geométrica separando sus términos con dos puntos y poniendo delante del primero el signo $\div\div$

Así, la progresión

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ \ldots$$

suele escribirse también como sigue:

$$\div\div 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : \ldots$$

Para representar en forma general una progresión geométrica según esta última notación, es corriente emplear la misma letra afectada de un subíndice, que indica el lugar ocupado por el término que se considera. De este modo:

$$\div\div a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_{n-1} : a_n$$

122. Progresiones crecientes y decrecientes. — Es costumbre estudiar únicamente las progresiones geométricas cuyos términos son positivos.

Para que se dé esta condición, es necesario y suficiente que el primer término y la razón sean positivos.

Si la razón es mayor que la unidad, los términos van creciendo sucesivamente, y la progresión se llama entonces *creciente*. Por el contrario, si la razón es menor que la unidad, los términos van disminuyendo, y la progresión se denomina *decreciente*.

Las progresiones geométricas, como las aritméticas, se consideran unas veces *limitadas* y otras *ilimitadas*.

La progresión

$$\div\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32$$

es creciente y limitada, siendo 2 su razón y 6 el número de términos, mientras que

$$\div\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \ldots$$

es decreciente e ilimitada, de razón igual a $\frac{1}{2}$.

123 Para escribir una progresión geométrica, cuando se conoce el primer término y la razón, bastará multiplicar sucesivamente la razón por el término que precede al que se halla.

EJEMPLO 1.º — Formar una progresión geométrica de 5 términos, si el primero es 7 y la razón 4.

Los sucesivos términos serán:

$$7; \quad 7 \cdot 4 = 28; \quad 28 \cdot 4 = 112; \quad 112 \cdot 4 = 448; \quad 448 \cdot 4 = 1.792;$$

y la progresión pedida,

$$\div\div 7 : 28 : 112 : 448 : 1.792.$$

EJEMPLO 2.º — Formar una progresión geométrica cuyo primer término sea 3 y la razón 0'1.

Los términos se obtendrán de este modo:

$$3; \quad 3 \cdot 0'1 = 0'3; \quad 0'3 \cdot 0'1 = 0'03; \quad 0'03 \cdot 0'1 = 0'003; \ldots$$

y la progresión, decreciente en este caso, será

$$\div\div 3 : 0'3 : 0'03 : 0'003 : 0'0003 : \ldots$$

124. Cálculo del término enésimo de una progresión geométrica. — En la siguiente representación simbólica de una progresión geométrica,

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\ \ldots,$$

el exponente de r en el *segundo* término es 1, en el *tercer* término es 2, en el *cuarto*, 3, y así sucesivamente; es decir, en cada término el exponente de r es *una unidad menor* que el número de orden de dicho término. Por tanto, el exponente de r en el término *enésimo*, o general, será $n - 1$.

Según esto, podemos escribir:

$$\boxed{a_n = a_1 r^{n-1}} \qquad [1]$$

Esta fórmula permite calcular el valor de un término cualquiera, cuando se conoce el primero y la razón de la progresión.

En dicha fórmula aparecen relacionadas cuatro cantidades, por lo cual podremos determinar una cualquiera de ellas cuando se conozcan las otras tres.

Así, tendremos:

$$\boxed{a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}} \qquad [2] \qquad \boxed{r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}} \qquad [3]$$

$$(n-1)\ \log r = \log a_n - \log a_1; \qquad \boxed{n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} + 1} \qquad [4]$$

EJEMPLO 1.º — Calcular el 7.º término de la progresión $\div\div 3 : 9 : 27 : \ldots$

La razón, r, es igual a $9 : 3 = 3$. Según la fórmula [1], resulta

$$a_7 = 3 \cdot 3^{7-1} = 3 \cdot 3^6 = 2.187$$

EJEMPLO 2.º — Calcular el primer término de una progresión geométrica cuya razón es 2 y el último término 1.280, siendo 8 el número de términos.

La fórmula [2] da:

$$a_1 = \frac{1.280}{2^{8-1}} = \frac{1.280}{128} = 10$$

EJEMPLO 3.º — Calcular la razón de una progresión de 9 términos, siendo 2 el primero y 781.250 el último.

Según la fórmula [3], tenemos:

$$r = \sqrt[9-1]{\frac{781.250}{2}} = \sqrt[8]{390.625} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{390.625}}} = 5$$

EJEMPLO 4.º — Calcular el número de términos de una progresión geométrica cuyos primero y último términos son, respectivamente, 4 y 2.916, y su razón, 3.

De $r^{n-1} = \frac{a_n}{a_1}$, se deduce: $3^{n-1} = \frac{2.916}{4} = 729 = 9^3 = 3^6$; luego $n = 7$

Resolviendo por logaritmos, se tendría [4]:

$$n = \frac{\log 2.916 - \log 4}{\log 3} + 1 = \frac{3'464788 - 0'602060}{0'477121} + 1 = 7$$

125. Medios geométricos. — Se llama *medio geométrico* (o *proporcional)* entre dos números dados *a* y *b*, a otro número *c* que forma con ellos una progresión geométrica de tres términos, siendo el primero *a* y el último *b*.

Pueden también intercalarse, o *interpolarse,* dos o más medios proporcionales entre dos números dados, obteniéndose así una progresión geométrica de cuatro o más términos.

Así, 6 es un medio geométrico, o proporcional, en la progresión geométrica 2, 6, 18. También 12 y 18 son medios geométricos en la progresión geométrica 8, 12, 18, 27.

126. Interpolación geométrica o proporcional. — *Interpolar* m *medios geométricos (o proporcionales) entre dos números* a *y* b, *es formar una progresión geométrica de* m + 2 *términos cuyos extremos sean* a *y* b

Para ello, bastará conocer la razón de dicha progresión.

La fórmula [3] da para este caso:

$$\boxed{r = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}} \qquad [5]$$

EJEMPLO. — Interpolar 6 medios proporcionales entre 5 y 640.

La razón será: $r = \sqrt[6+1]{\frac{640}{5}} = \sqrt[7]{128} = 2$; y la progresión que resulta:

$$\div\div 5 : 10 : 20 : 40 : 80 : 160 : 320 : 640$$

127. Teorema. — *Si entre cada dos términos consecutivos de una progresión geométrica se interpola el mismo número de medios proporcionales, se obtiene una nueva progresión geométrica, formada por los términos de la anterior y los medios proporcionales interpolados.*

En efecto: Si se toman dos términos consecutivos cualesquiera de la progresión

$$\div\div a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_{n-1} : a_n$$

por ejemplo, a_{n-1} y a_n, y se aplica la fórmula [5], resulta

$$r' = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_{n-1}}}$$

pero, por definición de progresión geométrica, es $a_n : a_{n-1} = r$; luego,

$$r' = \sqrt[m+1]{r}$$

Es decir, que la nueva razón r' no depende de los términos entre los cuales se hace la interpolación, y, por consiguiente, es la misma para todos ellos.

128. Producto de los términos equidistantes de los extremos. — *En toda progresión geométrica limitada, el producto de dos términos equidistantes de los extremos es igual al producto de éstos.*

En la progresión

$$\div\div a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_{n-1} : a_n$$

si a_1 y a_n representan los términos extremos, a_{h+1} y a_{n-h} designarán, respectivamente, el término al que preceden h y el término al que siguen h, por lo que, multiplicando miembro a miembro las siguientes igualdades, resulta:

$$\left.\begin{aligned} a_{h+1} &= a_1 r^h \\ a_{n-h} &= \frac{a_n}{r^h} \end{aligned}\right\} \quad a_{h+1} \cdot a_{n-h} = a_1 \cdot a_n$$

como se quería demostrar.

129. Producto de los términos de una progresión geométrica limitada. — Sea la progresión de n términos

$$\div\div a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_{n-2} \cdot a_{n-1} : a_n.$$

Representando por P el producto de los términos, tendremos

$$P = a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_{n-2}\, a_{n-1}\, a_n \qquad [A]$$

igualdad que, por la propiedad conmutativa de la multiplicación, puede también escribirse de este modo:

$$P = a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_3\, a_2\, a_1 \qquad [B]$$

Multiplicadas miembro a miembro las igualdades [A] y [B], y agrupados en productos parciales cada par de términos que ocupan el mismo lugar en una y otra, se obtiene:

$$P^2 = (a_1\, a_n)\,(a_2\, a_{n-1})\,(a_3\, a_{n-2}) \ldots (a_{n-2}\, a_3)\,(a_{n-1}\, a_2)\,(a_n\, a_1).$$

Como los productos indicados en los paréntesis corresponden a los de términos equidistantes de los extremos, podemos sustituir cada uno de ellos por el producto de dichos extremos (núm. 128).

Habiendo, además, tantos productos parciales como términos tiene la progresión, o sea n, resulta:

$$P^2 = (a_1\, a_n)^n, \text{ de donde } \boxed{P = \sqrt{(a_1\, a_n)^n}} \qquad [6]$$

Es decir: *El producto de los* n *términos de una progresión geométrica limitada es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos, elevado éste a la potencia enésima.*

130. Suma de los términos de una progresión geométrica limitada. — Si suponemos que la progresión

$$\div\div a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_{n-1} : a_n$$

tiene n términos y la razón es r, podremos escribirla de este modo:

$$\div\div a_1 : a_1 r : a_1 r^2 : \ldots : a_1 r^{n-2} : a_1 r^{n-1}$$

La suma de sus términos será

$$S = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1}$$

Multiplicando por r los dos miembros de esta igualdad, resulta

$$Sr = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n$$

Y restando de esta última igualdad la anterior, se obtiene

$$Sr - S = a_1 r^n - a_1$$

de donde,

$$S(r-1) = a_1(r^n-1)$$

y de aquí,

$$\boxed{S = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}} \qquad [7]$$

fórmula que permite calcular la suma de los términos, conociendo el número de ellos, el primero y la razón.

Teniendo en cuenta que

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

y que la fórmula [7] puede también escribirse

$$S = \frac{a_1 r^{n-1} \cdot r - a_1}{r-1}$$

dicha fórmula se convertirá en esta otra, después de sustituir,

$$\boxed{S = \frac{a_n r - a_1}{r-1}} \qquad [8]$$

la cual nos da la suma de los términos, cuando se conocen los extremos y la razón.

EJEMPLO 1.º — Hallar la suma de los 6 primeros términos de la progresión

$$\div 2 : 6 : 18 : \ldots$$

Conocemos $a_1 = 2$, $r = 3$ y $n = 6$, y se trata de hallar S.

Según [7], tenemos

$$S = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} = \frac{2(3^6-1)}{2} = 728$$

EJEMPLO 2.° — Hallar la suma de los términos de la progresión

$$\div 5 : 10 : \ldots : 20480.$$

Conocemos $a_1 = 5$, $a_n = 20480$ y $r = 2$.

De la fórmula [8] se deduce

$$S = \frac{a_n r - a_1}{r - 1} = \frac{20480 \cdot 2 - 5}{2 - 1} = 40955$$

131. Observación. — Las fórmulas

$$\begin{cases} a_n = a_1 r^{n-1} \\ S = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \end{cases}$$

constituyen dos relaciones que ligan las cantidades a_1, a_n, n, r y S. Cuando se conozcan tres de ellas, será fácil calcular las otras dos.

En el caso de ser n una de las incógnitas, los datos no podrán ser números cualesquiera, sino elegidos de modo que resulte para n un número natural.

EJEMPLO. — Calcular el primero y el último término de una progresión geométrica, si se sabe que la razón es 2, hay 10 términos y entre todos suman 256.

Representando por x e y, respectivamente, al primero y último términos, tendremos:

$$\begin{cases} y = x \cdot 2^9 \\ 256 = \dfrac{x(2^{10} - 1)}{2 - 1} \end{cases}$$

La segunda ecuación del sistema nos da $x = \frac{1}{2}$; valor que, sustituído en la primera, produce

$$y = \tfrac{1}{2} \cdot 512 = 256; \quad \text{luego,} \quad a_1 = \tfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad a_n = 256$$

132. Suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada. — Pueden presentarse los dos casos siguientes:

1.° *Que la progresión sea creciente.* — Los términos van creciendo sucesiva e indefinidamente y, por tanto, la suma llegará a ser mayor que cualquier número, es decir, tiende a infinito.

2.° *Que la progresión sea decreciente.* — En este caso, sabemos que $r < 1$, por lo que r^n tiende a cero (vér núm. 74). Si tenemos además en cuenta que la fórmula [7] puede ponerse así:

$$S = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r} \quad \text{o, también} \quad S = \frac{a_1}{1 - r} - \frac{a_1 r^n}{1 - r}$$

vemos que el segundo término de esta suma tiende a cero, y queda

$$S = \frac{a_1}{1 - r} \qquad [9]$$

Luego, *la suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada decreciente es igual al primer término dividido por* 1 *menos la razón.*

EJEMPLO. — Hallar la suma de los términos de la progresión ilimitada

$$\div\div 2 : 1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{4} : \ldots$$

Siendo $r = \frac{1}{2}$, se tiene:

$$S = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4$$

133. Aplicación al cálculo de la generatriz de una fracción decimal periódica. — Una fracción decimal periódica *pura* puede considerarse como la suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada.

Así, por ejemplo, $0'2\widehat{323}\ldots$ equivale a la suma de los términos de la progresión

$$\div\div 0'23 : 0'0023 : 0'000023 : \ldots$$

cuya razón es 0'01.

Luego, en virtud de la fórmula [9], se tiene:

$$S = \frac{0'23}{1 - 0'01} = \frac{0'23}{0'99} = \frac{23}{99}$$

El resultado así hallado será, por consiguiente, la *generatriz* de la fracción periódica pura considerada.

Supongamos, ahora, una fracción decimal periódica *mixta,* como $0'23\widehat{434}\ldots$. Podemos considerarla como la suma de 0'2, más la suma de los términos de la progresión geométrica decreciente e ilimitada

$$\div\div 0'034 : 0'00034 : 0'0000034 : \ldots$$

cuya razón es 0'01.

Dicha suma será

$$S = \frac{0'034}{1 - 0'01} = \frac{0'034}{0'99} = \frac{34}{990}$$

Sabiendo, además, que

$$0'2 = \frac{2}{10} = \frac{2 \cdot 99}{10 \cdot 99} = \frac{2(100-1)}{990} = \frac{200-2}{990}$$

la fracción decimal periódica mixta considerada tendrá por valor

$$\frac{200-2}{990} + \frac{34}{990} = \frac{234-2}{990}$$

La última expresión corresponde a la generatriz de la referida fracción periódica mixta, que, como se ve, coincide con el valor que se obtendría aplicando la conocida regla de Aritmética.

Si efectuamos la diferencia indicada y simplificamos el resultado, se obtiene finalmente:

$$0'2\widehat{34}\ldots = \frac{232}{990} = \frac{116}{495}$$

EJERCICIOS

229. Decir si la progresión $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots$ es aritmética o geométrica.

Hallar:

230. El 6.º término de la progresión $\div\div 5 : 3 : \frac{9}{5} : \ldots$

231. El 10.º término de la progresión $\div\div \sqrt{3} : 3 : 3\sqrt{3} : \ldots$

232. El 8.º término de la progresión $\div\div 0'008 : 0'04 : 0'2 : \ldots$

233. El 8.º término de la progresión $\div\div 5\sqrt{2} : 10 : 10\sqrt{2} : \ldots$

234. El 12.º término de la progresión $\div\div 1 : (a+b) : (a+b)^2 : \ldots$

235. El 8.º término de la progresión $\div\div x : xy : xy^2 : \ldots$

236. El 20.º término de la progresión $\div\div 1 : 1'05 : (1'05)^2 : \ldots$

237. El 12.º término de la progresión $\div\div x : \frac{x^2}{4} : \frac{x^3}{16} : \ldots$

238. El 6.º término de una progresión geométrica es 972, y la razón, 3. Hallar el primer término.

239. ¿Cuál es el 9.º término de una progresión geométrica, si el 1.º es 9 y la razón $\frac{1}{3}$?

240. ¿Cuál es el 7.º término de una progresión cuyo primer término es $\frac{1}{46656}$, y la razón, 6?

Hallar la razón de la progresión geométrica cuyo primer término es:

241. $\frac{2}{9}$, y el 6.º término, 54.

242. 3, y el 4.º término, $\frac{1}{243}$.

243. $\frac{3}{4}$, y el 7.º término, $\frac{1}{972}$.

244. Interpolar 3 medios proporcionales entre 486 y 6.

245. Interpolar 2 medios proporcionales entre $\frac{1}{16}$ y 4.

246. Interpolar 5 medios proporcionales entre $\frac{32}{81}$ y $4\frac{1}{2}$.

247. Interpolar 4 medios proporcionales entre $\frac{1}{3}$ y 81.

248. Interpolar 4 medios proporcionales entre $\sqrt{3}$ y $4\sqrt{6}$.

Hallar el medio proporcional (o media geométrica) entre:

249. $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{2}$

250. $\frac{m}{n}$ y $\frac{n}{m}$

251. $a^2 + 2ab + b^2$ y $a^2 - 2ab + b^2$

253. $3abc^3$ y $12abc$

252. $\frac{a+b}{a-b}$ y $\frac{1}{a^2-b^2}$

254. $\frac{x}{y^2}$ e $\frac{y^2}{x}$

Hallar el producto de los 7 primeros términos de las progresiones siguientes:

255. $\div\div 8 : 4 : 2 : \ldots$

256. $\div\div \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \ldots$

Hallar la suma de los primeros:

257. 6 términos de la progresión $\div\div 6 : 12 : 24 : \ldots$

258. 7 términos de la progresión $\div\div 8'1 : 2'7 : 0'9 : \ldots$

259. 8 términos de la progresión $\div\div \frac{1}{72} : \frac{1}{24} : \frac{1}{8} : \ldots$

260. 9 términos de la progresión $\div\div 4\frac{1}{2} : 1\frac{1}{2} : \frac{1}{2} : \ldots$

261. 5 términos de la progresión $\div\div x : x^2y : x^3y^2 : \ldots$

262. 20 términos de la progresión $\div\div 1 : 1 + n : (1+n)^2 : \ldots$

263. 8 términos de la progresión $\div\div \frac{1}{\sqrt{3}} : 1 : \frac{3}{\sqrt{3}} : \ldots$

264. Hallar la suma de las 10 primeras potencias de $\frac{1}{2}$.

265. Hallar la suma de las n primeras potencias de $1 + r$.

En una progresión geométrica se conocen:

266. $a_1 = 3$; $r = 4$; $n = 5$. — Hallar a_n y S.

267. $n = 6$; $r = \frac{1}{4}$; $S = 2730$. — Hallar a_1 y a_n.

268. $a_1 = 12$; $r = 1'2$; $n = 8$. — Hallar a_n y S.

269. $a_n = \frac{7}{125}$; $r = \frac{1}{5}$; $n = 8$. — Hallar a_1 y S.

270. $r = 2$; $n = 7$; $S = 635$. — Hallar a_1 y a_n.

Hallar la suma de los términos de cada una de las progresiones ilimitadas siguientes:

271. $\div\div 3 : 1 : \frac{1}{3} : \ldots$

272. $\div\div 6 : 3 : \frac{3}{2} : \ldots$

273. $\div\div 3 : \frac{3}{2} : \frac{3}{4} : \ldots$

274. $\div\div 1 : \frac{1}{10} : \frac{1}{100} : \ldots$

275. $\div\div a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{9}a : \ldots$

Hallar la generatriz de las siguientes fracciones periódicas:

276. 0'777777 ...

277. 0'343434 ...

278. 0'818181 ...

279. 0'4090909 ...

280. 0'189189 ...

281. 0'42333 ...

282. 0'2101101...

283. 0'0010101 ...

284. 0'162222 ...

285. 0'845151 ...

286. Hallar tres números en progresión geométrica cuya suma sea 26, y el producto, 216.

287. Hallar tres números en progresión geométrica, sabiendo que su suma es 65, y su producto, 3.375.

288. Tres números, cuya suma es 36, están en progresión aritmética. Si se les suma 1, 4 y 43, respectivamente, los resultados forman una progresión geométrica. ¿Cuáles son esos números?

289. En una progresión geométrica, la suma del primero y segundo términos es 12, y la suma del 3.º y 4.º términos, 108. Hallar la razón y la suma de los 7 primeros términos.

290. En una progresión geométrica, la diferencia entre el 4.º y 2.º términos es 120. Sabiendo que el valor del 3.er término es 32, hallar la razón y los cuatro primeros términos.

291. En una progresión geométrica, el primer término es 7, el último 448, y la suma, 889. Hallar la razón y el número de términos.

292. Interpolar 5 medios proporcionales entre $\sqrt{3}$ y $27\sqrt{3}$.

293. La suma de los tres primeros términos de una progresión geométrica es 105, y su producto, 8.000. Escribir dicha progresión.

294. Se cuenta que el inventor del ajedrez pidió como recompensa: 1 grano de trigo por el primer cuadrado del tablero, 2 por el segundo, 4 por el tercero, y así sucesivamente, duplicando siempre hasta el cuadrado 64. Averiguar los granos que pidió; y si un grano pesa 1 dg., hallar el peso del trigo en Tm.

295. La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente es 2, y el primer término, 1/2. Calcular la razón.

296. Hallar dos números, sabiendo que su media aritmética es 5, y su media geométrica, 4.

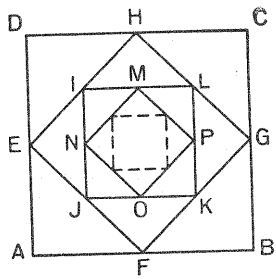


FIGURA 1

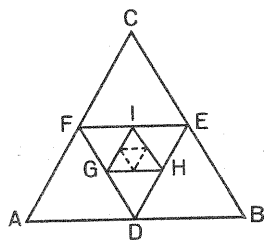


FIGURA 2

297. Dado un cuadrado de un metro de lado (fig. 1), unamos dos a dos los puntos medios de sus lados; obtendremos de ese modo un nuevo cuadrado, en el que se practicará la misma operación. Procediendo así sucesiva e indefinidamente, ¿cuál será el límite de la suma de las áreas de todos los cuadrados obtenidos?

298. Los ángulos de un cuadrilátero forman progresión geométrica, y el último es 9 veces el valor del segundo. Averiguar el valor de dichos ángulos.

299. Un mendigo pide hospitalidad a un avaro, haciéndole la siguiente proposición: «Yo pagaré 1 pta. por el primer día; 2 ptas. por el segundo; 3 ptas. por el tercero, y así sucesivamente. En cambio, usted me dará 0'001 de céntimo el primer día; 0'002 cts. el segundo; 0'004 cts. el tercero, y así sucesivamente, duplicando siempre la cantidad anterior». El avaro encontró esta proposición como un buen negocio y consintió en el arreglo por 30 días. Hacer la liquidación de cuentas al fin de este tiempo.

300. Un agricultor siembra durante cinco años consecutivos toda la cosecha de trigo del año anterior. El primer año sembró 1 Hl. y recogió 4 Hl. Calcular el número de hectolitros que recogió en la última cosecha, si cada año tuvo el mismo rendimiento, del 4 por uno.

301. El triángulo *ABC* de la figura 2 es un triángulo equilátero, cuyo lado *AB* mide 3 cm. El *DEF* es también un triángulo equilátero, obtenido al unir los puntos medios de los lados de *ABC*. De modo análogo se han obtenido el

GHI y siguientes. Escribir la progresión formada por las áreas de los sucesivos triángulos y hallar la suma de las áreas de todos los triángulos que es posible obtener siguiendo igual procedimiento.

302. En una población que cuenta con 29.524 habitantes mayores de siete años, uno de ellos se entera de una noticia en cierto instante. Al cabo de un minuto lo ha comunicado a 3 de sus amigos. Cada uno de éstos lo comunica en otro minuto a otras 3 personas distintas, las cuales continúan extendiendo la noticia de igual modo, y así sucesivamente. ¿Al cabo de cuánto tiempo se habrán enterado todos los habitantes?

303. Los tres ángulos de un triángulo están en progresión geométrica, siendo la medida del menor 25° y $\frac{5}{7}$ de grado. Hallar los otros dos.

304. Calcular los cuatro ángulos de un cuadrilátero, si se sabe que están en progresión geométrica, y que el mayor es 27 veces el menor.

305. De un barril de vino que contenía 512 litros, se vació el 1.º de enero la mitad del contenido; al día siguiente se sacó del barril la mitad del resto; el día 3 se sacó la mitad del nuevo resto, y así sucesivamente. ¿Qué cantidad de vino se sacó del barril el 13 de enero?

306. Hallar dos números, x e y, comprendidos entre 9 y 2, tales que 9, x e y estén en progresión geométrica, y x, y, 2 estén en progresión aritmética.

307. Alguien puso en venta su caballo en las condiciones siguientes: Pedía 1 céntimo por el primer clavo de las herraduras, 2 por el segundo, 4 por el tercero, y así sucesivamente, doblando siempre en cada clavo el precio del anterior. Se supone que el caballo tenía cuatro herraduras con ocho clavos cada una. Averiguar lo que pedía por el caballo, según las condiciones antedichas.

308. Hallar el valor que ha de tener x en las expresiones $2x + 1$; $4x + 2$; $7x + 5$ para que formen una progresión geométrica.

309. Tenemos tres números en progresión aritmética y otros tres en progresión geométrica. Los términos de la aritmética son la mitad, la cuarta parte y la novena parte, respectivamente, de los términos de la progresión geométrica. Hallar las dos progresiones, si la suma de los seis términos es 183.

310. La suma del primero y cuarto términos de una progresión geométrica es 27, y la del segundo y tercero es 18. Escribir la progresión.

311. La suma de los tres términos de una progresión aritmética es 15. Si se les añade 1, 4 y 19, respectivamente, los resultados están en progresión geométrica. Escribir ambas progresiones.

312. ¿Para qué valor de k las expresiones $k + 3$; $6k + 3$; $20k + 5$, forman una progresión geométrica?

18. Interés compuesto y anualidades

134. Interés compuesto. — Cuando los intereses devengados por un capital se van acumulando a éste de tiempo en tiempo para producir nuevos intereses, el interés se llama *compuesto.*

Generalmente, la capitalización o acumulación de intereses se hace de año en año.

Para hallar la fórmula general del interés compuesto, designemos por c el capital prestado, por r el tanto por uno anual, y por t el tiempo expresado en años.

Al finalizar el primer año, una unidad se ha convertido en $(1+r)$, y, por consiguiente, el capital c se convertirá en

$$c_1 = c(1+r).$$

Al finalizar el segundo año, cada unidad de c_1 se ha convertido en $(1+r)$, y por consiguiente, c_1 se transformará en

$$c_2 = c_1(1+r) = c(1+r)(1+r) = c(1+r)^2$$

Si se continúa razonando de igual modo, y se designa por C el capital final, se llegará a la fórmula

$$\boxed{C = c(1+r)^t} \qquad [1]$$

que es la fórmula del interés compuesto.

En ella hay relacionadas cuatro cantidades: C, c, r y t. Conocidas tres de dichas cantidades, podremos calcular la cuarta, dando lugar a cuatro clases de problemas.

Los cálculos que se necesitan para resolver estos problemas se practican, generalmente, utilizando los logaritmos.

Así, de [1] se obtiene

$$\log C = \log c + t \log (1+r) \qquad [2]$$

y de ésta,

$$\log c = \log C - t \log (1+r) \qquad [3]$$

$$\log (1+r) = \frac{\log C - \log c}{t} \qquad [4]$$

$$t = \frac{\log C - \log c}{\log (1+r)} \qquad [5]$$

EJEMPLO 1.° — ¿En qué se convierten 6.000 ptas. prestadas al 5 % a interés compuesto, en 3 años?

La fórmula [2] da:

$$\log C = \log 6.000 + 3 \log 1'05$$

$$\begin{array}{lr} \log 6.000 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = 3'778151 \\ 3 \log 1'05 = 3 \times 0'021189 \ldots\ldots\ldots\ldots & = 0'063567 \\ \hline \log C \ldots\ldots\ldots\ldots & = 3'841718 \end{array}$$

$$C = \text{antilog } 3'841718 = 6.945'75 \text{ ptas.}$$

EJEMPLO 2.° — Hallar el tanto por ciento a que se colocaron 12.000 pesetas, a interés compuesto, sabiendo que en 8 años se convirtieron en 19.126'18 pesetas.

Aplicando la fórmula [4], resulta:

$$\log (1+r) = \frac{\log 19.126'18 - \log 12.000}{8}$$

$$\begin{array}{lr} \log 19.126'18 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = 4'281628 \\ \text{colog } 12.000 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = \bar{5}'920819 \\ \hline & 0'202447 \;\big|\; 8 \\ \hline & 0'025306 = \log (1+r) \end{array}$$

$$1 + r = \text{antilog } 0'025306 = 1'06; \qquad r = 0'06$$

Luego, el tanto por ciento pedido es 6 %.

135. Anualidades. — Reciben el nombre de *anualidades,* las cantidades constantes que se entregan cada año para su colocación a interés compuesto. Pueden ser de dos clases:

1.° *Anualidades de capitalización,* cuyo objeto es constituir un capital.

2.° *Anualidades de amortización,* o que tienen por objeto pagar una deuda.

136. Anualidades de capitalización. — *Son cantidades fijas que se entregan anualmente para su colocación a interés compuesto, con objeto de llegar a constituir un capital en un período determinado de años.*

Estas anualidades se entregan *al principio de cada año.*

Supongamos que al principio de cada año se entrega la cantidad a para su colocación a interés compuesto al r por 1. Admitamos también que esta operación se realiza durante t años. Se habrá formado un capital, cuyo valor vamos a calcular.

La primera anualidad a está colocada t años, convirtiéndose, por consiguiente, en $a(1+r)^t$.

La anualidad segunda se halla colocada $t-1$ años, después de los cuales tendrá por valor $a(1+r)^{t-1}$.

Análogamente, las anualidades entregadas al principio del tercero, cuarto, etc., años, se convertirán en capitales, cuyos valores serán, respectivamente, $a(1+r)^{t-2}$, $a(1+r)^{t-3}$, ..., etc., y la última anualidad, que sólo está colocada un año, se transformará en $a(1+r)$.

El capital C que se haya constituído estará formado por la siguiente suma:

$$C = a(1+r)^t + a(1+r)^{t-1} + a(1+r)^{t-2} + \ldots + a(1+r)^2 + a(1+r)$$

o escrita en orden inverso,

$$C = a(1+r) + a(1+r)^2 + \ldots + a(1+r)^{t-2} + a(1+r)^{t-1} + a(1+r)^t.$$

El segundo miembro de esta igualdad es la suma de los términos de una progresión geométrica, cuyo primer término es $a(1+r)$, la razón $(1+r)$ y el número de términos, t. Luego, aplicando la fórmula que nos da dicha suma (núm. 130), resultará:

$$\boxed{C = \frac{a(1+r)[(1+r)^t-1]}{r}} \qquad [6]$$

En esta fórmula hay cuatro cantidades relacionadas entre sí, C, a, r y t; una de ellas podrá tomarse como incógnita, cuando se conozcan las otras tres, originándose de este modo cuatro clases de problemas.

Para el cálculo de C y de a, bastará tomar logaritmos en la fórmula [6].

$$\log C = \log a + \log (1+r) + \log [(1+r)^t - 1] + \operatorname{colog} r \qquad [7]$$

$$\log a = \log C + \log r + \operatorname{colog} (1+r) + \operatorname{colog} [(1+r)^t - 1] \qquad [8]$$

CÁLCULO DEL TIEMPO. — De la fórmula [6] se deduce

$$Cr = a(1+r)[(1+r)^t - 1]$$

y de ésta,

$$(1+r)^t = \frac{Cr}{a(1+r)} + 1 = \frac{Cr + a(1+r)}{a(1+r)}$$

Tomando logaritmos, se obtiene

$$t \log (1+r) = \log [Cr + a(1+r)] + \operatorname{colog} a + \operatorname{colog} (1+r)$$

de donde,

$$t = \frac{\log [Cr + a(1+r)] + \operatorname{colog} a + \operatorname{colog} (1+r)}{\log (1+r)} \qquad [9]$$

OBSERVACIÓN. — El cálculo de r no puede hacerse directamente. Se efectúa por medio de aproximaciones sucesivas.

137. Anualidades de amortización. — *Son cantidades fijas que se pagan anualmente para su colocación a interés compuesto, con el fin de llegar a extinguir o amortizar una deuda juntamente con sus intereses en un período determinado de años.*

Estas anualidades se pagan *al fin de cada año.*

Supongamos un capital c prestado a interés compuesto, que debe pagarse mediante t anualidades iguales, satisfechas al final de cada año, partiendo del día del empréstito.

Veamos en qué se van convirtiendo las diferentes anualidades entregadas por el deudor.

La primera anualidad, como se entrega al finalizar el primer año, está en poder del acreedor $t - 1$ años. Se convierte, por tanto, en $a(1+r)^{t-1}$.

La anualidad segunda, satisfecha $t - 2$ años antes de extinguirse el préstamo, se convierte en $a(1+r)^{t-2}$.

Del mismo modo, las anualidades tercera, cuarta, etc., se convierten, respectivamente, en $a(1+r)^{t-3}$, $a(1+r)^{t-4}$, ..., etc., y la última anualidad, que la recibe el acreedor al finalizar la amortización, no producirá ningún interés. Su valor será, pues, a.

Sumando todos estos valores y observando que son términos de una progresión geométrica de t términos, el primero de los cuales es a, y la razón $(1+r)$, resulta, haciendo uso de la fórmula [7] del núm. 130,

$$\frac{a(1+r)^t - a}{r} = \frac{a[(1+r)^t - 1]}{r}$$

expresión que nos da la suma de todas las anualidades entregadas al acreedor juntamente con sus intereses compuestos.

Ahora bien: El capital c que se trata de extinguir ha estado en poder del deudor t años. Se habrá convertido al cabo de ese tiempo en $c(1+r)^t$ y, por consiguiente, habrá de ser igual a la suma de los valores de las anualidades entregadas. De acuerdo con esto, la fórmula de las anualidades de amortización será:

$$c(1+r)^t = \frac{a[(1+r)^t - 1]}{r} \qquad [10]$$

Según sea una u otra la cantidad tomada como incógnita, de entre las cuatro que se hallan relacionadas en la fórmula anterior, se originarán cuatro tipos de problemas.

Las cantidades c y a se calculan, tomando logaritmos en [10], por las expresiones

$$\log c = \log a + \log [(1+r)^t - 1] + \operatorname{colog} r + t \operatorname{colog} (1+r) \qquad [11]$$

$$\log a = \log c + t \log (1+r) + \log r + \operatorname{colog} [(1+r)^t - 1] \qquad [12]$$

CÁLCULO DEL TIEMPO. — De la fórmula

$$c(1+r)^t = \frac{a(1+r)^t - a}{r}$$

se deduce

$$cr(1+r)^t = a(1+r)^t - a;$$

de donde, sacando $(1+r)^t$ factor común, resulta

$$(1+r)^t(a-cr) = a,$$

y tomando logaritmos

$$\log a = t \log (1+r) + \log (a-cr).$$

Despejando ahora t, se tiene:

$$t = \frac{\log a + \operatorname{colog} (a-cr)}{\log (1+r)} \qquad [13]$$

OBSERVACIÓN. — El cálculo de r no se hace directamente, sino por aproximaciones sucesivas.

138. Ejemplos: PROBLEMA 1.º — ¿Qué cantidad se habrá de imponer anualmente al 5 % de interés compuesto para llegar a formar al cabo de 10 años un capital de 50.000 ptas.?

Aplicando la fórmula [8], núm. 136, resulta:

$$\log a = \log 50.000 + \log 0'05 + \operatorname{colog} 1'05 + \operatorname{colog} (1'05^{10}-1)$$

$$\begin{aligned}
&\log 50.000 \ldots\ldots = 4'698970\\
&\log 0'05 \ldots\ldots = \bar{2}'698970\\
&\operatorname{colog} 1'05 \ldots\ldots = \bar{1}'978811\\
&\operatorname{colog} (1'05^{10}-1) = \operatorname{colog} (1'628885-1) = 0'201428\\
&\qquad\qquad \log a \ldots\ldots = 3'578179
\end{aligned}$$

$$a = \text{antilog } 3'578179 = 3.785'98$$

Luego, la anualidad será de 3.786 ptas.

OBSERVACIÓN. — Siendo $(1'05^{10}-1)$ una diferencia indicada, no puede obtenerse directamente el resultado por logaritmos, como tampoco se podría obtener si fuera una suma. Se calcula este valor del modo siguiente:

$$\log 1'05^{10} = 10 \cdot 0'021189 = 0'21189$$
$$\text{antilog } 0'21189 = 1'628885.$$

Se efectúa la diferencia $1'628885 - 1 = 0'628885$, y se halla su logaritmo; $\log 0'628885 = \bar{1}'798572$, y su cologaritmo, 0'201428, es el que figura en la operación arriba efectuada.

PROBLEMA 2.º — Una persona a quien se acaban de prestar 18.000 pesetas se compromete a satisfacer esta deuda con sus intereses compuestos al 4 % en 10 anualidades. ¿Cuál será el valor de cada anualidad?

Según la fórmula [12] del núm. 137, podemos poner:

$$\log a = \log 18.000 + 10 \cdot \log 1'04 + \log 0'04 + \operatorname{colog} (1'04^{10} - 1)$$

$$\begin{aligned}
&\log 18.000 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 4'255273 \\
&10 \cdot \log 1'04 = 10 \cdot 0'017033 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0'170330 \\
&\log 0'04 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \overline{2}'602060 \\
&\operatorname{colog} (1'04^{10} - 1) = \operatorname{colog} (1'480233 - 1) = 0'318548 \\
&\log a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 3'346211
\end{aligned}$$

$$a = \text{antilog } 3'346211 = 2.219'27$$

La anualidad será de 2.219'25 ptas.

EJERCICIOS

Calcular las cantidades en que se transformarán los capitales siguientes, prestados a interés compuesto, suponiendo que los intereses se capitalicen: 1.º, cada año; 2.º, cada 6 meses (considerando el tanto r *en este caso reducido a la mitad):*

313. 46.250 ptas. al 3 % en 3 años.

314. 250.000 ptas. al 5 % en 2 años.

315. 7.420 ptas. al 6 % en 3 años.

316. 46.250 ptas. al 2 % en 7 años.

317. 74.520 ptas. al 4 % en 3 años.

318. 38.250 ptas. al 4 % en 5 años.

Calcular la cantidad en que se convertirá una peseta prestada a interés compuesto:

319. Al 4 % durante 3, 6, 11, 16 y 19 años.

320. Al 5 % durante 5, 10, 14, 18 y 20 años.

Calcular a qué tanto % de interés compuesto se prestó un capital de 5.000 pesetas, suponiendo lo siguiente:

321. En 15 años se convirtió en 9.004'72 ptas.

322. En 40 años se convirtió en 35.200 ptas.

Calcular el tiempo que necesitaría para quedar duplicado un capital, prestado en las condiciones siguientes:

323. 1.º, Al 3 % de interés simple; 2.º, al 3 % de interés compuesto.

324. 1.º, Al 5 % de interés simple; 2.º, al 5 % de interés compuesto.

325. Se han prestado 15.000 ptas. al 4 % de interés compuesto. ¿Cuánto sumarán al cabo de 12 años el capital e intereses reunidos?

326. ¿Qué capital se prestó al 4 % de interés compuesto por 10 años, habiéndose convertido al cabo de ese tiempo en 74.012'20 ptas.?

327. Hace 4 años se prestaron 11.000 ptas. al 4 % de interés compuesto. ¿Cuánto se recibirá por el capital e intereses reunidos?

328. ¿En qué se convierte, después de 12 años, un capital de 18.000 ptas. colocado a interés compuesto, al 4 % anual?

329. Hallar el interés compuesto de 12.000 ptas., prestadas al 3 % en 7 años.

330. Hallar el capital que, colocado al 6 % de interés compuesto, se ha convertido en 20.645'50 ptas. después de 20 años.

331. ¿Cuánto tiempo estuvo prestado un capital de 100.000 pesetas al 5 % de interés compuesto, si se convirtió en 147.745 ptas.?

332. ¿Qué capital, prestado al 6 % de interés compuesto, se convirtió en 26.764'55 ptas. al cabo de 5 años?

333. ¿Cuál es el capital que, colocado a interés compuesto al 4'50 %, se ha convertido en 25.000 ptas. después de 12 años?

334. ¿A qué tanto por ciento de interés compuesto se prestó la cantidad de 12.957'60 ptas., si en 3 años se elevó a 15.000 ptas.?

335. ¿Qué es preferible, colocar 650.000 ptas. al 4 % de interés compuesto durante 5 años, o imponer dicha suma al 5 % de interés simple durante el mismo tiempo?

336. Un capital prestado al 4'5 % de interés compuesto, ¿en cuánto tiempo se duplicará?

337. ¿A qué tanto por ciento habrá de colocarse un capital de 90.000 ptas., durante 15 años, para que se convierta en 162.110 ptas.?

338. Calcular, sin tablas de logaritmos o de intereses, el tanto por ciento a que debe colocarse un capital de 40.000 ptas. para que produzca durante 2 años, una ganancia de 2.436 ptas. a interés compuesto.

339. Hallar a qué tanto por ciento de interés compuesto hay que colocar 20.000 ptas. durante 8 años para que se conviertan en 28.443 pesetas.

340. Suponiendo que en el año del nacimiento de N. S. Jesucristo, se hubiera colocado la insignificante cantidad de 5 céntimos al 4 % de interés compuesto, calcular la suma en que aproximadamente se habría convertido después de diecinueve siglos. Opérese con el logaritmo de 1'04 hasta la octava cifra decimal (log 1'04 = 0'01703334).

341. Hallar el tiempo que necesita un capital, colocado al 4'75 % de interés compuesto, para que aumente en su mitad.

342. Un filántropo hizo un donativo de 2.000.000 de pesetas para construir un hospital. No siendo suficiente esa cantidad, se colocó a interés compuesto al 4 % por el tiempo necesario para convertirla en 2.433.295 ptas., que es lo que costaba el edificio. ¿Cuánto tiempo estuvo prestada la cantidad?

343. Se ha prestado a interés compuesto al 4 % la cantidad de 50.000 ptas. durante 10 años. ¿Cuánto tiempo habría necesitado para convertirse en la cantidad producida si el préstamo se hubiera hecho al 5 %?

344. Un fumador calcula que su gasto en tabaco se eleva a 4.250 pesetas anuales. Decide no fumar e ingresa cada año esa cantidad en una libreta de la Caja de Ahorros de un Banco, el cual le abona interés compuesto al 3 %. ¿Qué capital habrá formado al cabo de 20 años?

345. Calcular la anualidad que debe pagarse al principio de cada año, durante 10 años consecutivos, para formar al cabo de ese tiempo un capital de 125.000 ptas., suponiendo el 5 % de interés compuesto.

346. Al cabo de 10 años retiré de la Caja de Ahorros de un Banco el capital de 41.271'20 ptas., producido por anualidades que satisfice al principio de cada año, las cuales me fueron abonadas al 5 % de interés compuesto. ¿Cuál fue el valor de cada anualidad?

347. Un empleado desea conocer qué suma recibirá después de 20 años, si al principio de cada uno de ellos entrega 2.000 ptas. para ser colocadas a interés compuesto al 5 %. Dígase la cantidad que percibirá al cabo de ese tiempo.

348. Un padre de familia quiere dejar a cada uno de sus 4 hijos la misma cantidad. Para ello, deposita en un Banco al principio de cada año 4.320 ptas., el cual le abona el 3 % de interés compuesto. ¿Qué suma corresponderá a cada hijo después de los 15 años de la primera imposición?

349. Un individuo fue colocando al principio de cada año cierta cantidad a interés compuesto al 3'5 %. ¿Cuánto entregó anualmente, si al cabo de 12 años tiene con el Banco un saldo a su favor de 42.304 pesetas?

350. El primer día de cada año se hace una entrega de 500 pesetas a interés compuesto del 5 %. ¿Después de cuántos años se podrán percibir 18.752'60 ptas.?

351. Un empleado, que cumple hoy 35 años de edad, desea tener constituído un capital de 50.000 ptas. al llegar a los 60. Para ello, se ha comprometido con una entidad bancaria a satisfacer todos los años, en esta fecha, una determinada cantidad. ¿Qué cantidad será ésta, sabiendo que la tal anualidad ha sido estipulada al 4'5 %?

352. El Ayuntamiento de una población ha emitido un empréstito de 1.200.000 ptas., cantidad que desea amortizar mediante anualidades de 76.133'15 pesetas cada una. La entidad bancaria que aportó el capital cobra el 6 % anual. Calcular el número de años durante los cuales habrá de figurar la citada anualidad en el presupuesto de la ciudad. (La primera entrega se efectúa un año después de verificado el empréstito).

353. Una empresa editora puede disponer anualmente de 50.000 pesetas para gastos de amortización. Con ellas desea amortizar en 18 años un capital que pide prestado a una entidad bancaria. Averiguar la cuantía de ese capital, si se sabe que la operación se estipula al 4 % de interés compuesto anual.

354. Un individuo que debe abonar 75.000 ptas. en este momento, propone a su acreedor pagarlas en 12 plazos anuales iguales, con interés compuesto del 4 %. ¿Cuál ha de ser la cuantía de la anualidad?

355. El Ayuntamiento de una ciudad ha emitido un empréstito de 3.000.000 de pesetas que abona al 6 % de interés compuesto y desea amortizar en 50 plazos anuales iguales. ¿Qué anualidad habrá de pagar?

356. Una deuda, contraída a interés compuesto al 5'5 %, se ha pagado con 30 anualidades de 8.300 ptas. cada una. ¿A cuánto ascendía la deuda?

357. Un individuo debe aún siete anualidades de 2.500 ptas., con las cuales amortiza al 4 % una deuda que había contraído. Pero al ser favorecido por la suerte con uno de los primeros premios de la Lotería Nacional, decide zanjar hoy mismo su deuda en un solo pago. ¿Qué cantidad debe abonar? (Se supone que faltan 7 años exactos hasta que le correspondiera efectuar la entrega de la última anualidad).

358. Una ciudad emite un empréstito de 145 millones de pesetas, que debe reembolsar con 10 pagos anuales de igual valor. La primera entrega tiene que efectuarse un año después de verificado el empréstito. Teniendo en cuenta el interés compuesto al 4'5 %, hallar el valor de cada anualidad.

359. Se han presentado tres compradores, *A*, *B* y *C*, para la adquisición de una finca que se halla en venta. *A* ofrece por la finca 75.000 ptas., pagaderas en el momento de firmarse el contrato; *B* ofrece 82.000 ptas., pagaderas a los 3 años de haberse firmado el contrato. Finalmente, *C* ofrece pagar por la finca 85.000 pesetas, distribuídas en 5 anualidades de 17.000 ptas. cada una, la primera de ellas pagadera al firmarse el contrato y las restantes de año en año. ¿Cuál de estas tres ofertas es la más ventajosa para el propietario de la finca, admitiendo que éste puede colocar su dinero al 5 %?

360. Deseando asegurar el porvenir de sus hijos, contrata una persona con una Compañía de seguros sobre la vida, una póliza, en la cual la Compañía se compromete a entregar a los hijos 150.000 ptas. en el momento de la muerte del asegurado. A cambio de esto, el padre deberá abonar durante su vida a la Compañía, una prima de 2.500 ptas. anuales, la primera abonada en el momento de firmar el contrato y las restantes de año en año. Cuando el padre llevaba pagadas 30 anualidades, falleció, y la Compañía entregó a los hijos las 150.000 ptas. que había prometido. Decir si la Compañía ganó o perdió en este negocio, y cuál fue la cuantía de lo ganado o perdido, admitiendo que la referida Compañía efectuase sus operaciones al 5 %.

19. Vectores planos

139. Magnitudes vectoriales. — Existen magnitudes en las que, además de su *valor* o *módulo,* hay que considerar una *dirección* y un *sentido.* A tales magnitudes las llamamos *vectoriales* o *dirigidas.*

Así, por ejemplo, la velocidad de un móvil tiene un valor (v. g., 40 kilómetros por hora), está localizada en cada instante en un punto diferente y tiene una dirección y un sentido determinados. Lo mismo sucede con una fuerza.

140. Vectores. — Muchas magnitudes dirigidas se estudian gráficamente por medio de *vectores,* que son segmentos de longitud proporcional al módulo de la magnitud representada por ellos, y que poseen un sentido determinado.

En todo vector hay que distinguir (fig. 63):

1.° El *origen M,* o punto de aplicación.

2.° La *intensidad, valor* o *módulo,* que es la longitud del segmento *MN.*

3.° La *dirección,* que es la de la recta *AB.* También se llama *recta de acción* o *soporte del vector.*

4.° El *sentido,* que es el de un móvil que lo recorra desde su origen *M* a su extremo *N.* Se representa por una punta de flecha colocada en el extremo *N* del vector.

La notación que suele emplearse es ésta: vector AB, o bien $\overrightarrow{AB}$. Igualmente, puede ponerse: vector $a, b, c, \ldots v$, o bien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots \vec{v}$.

141. Vectores equipolentes. — Dos vectores cuyos soportes son paralelos tienen la misma dirección, y dos vectores de la misma dirección tienen el mismo sentido, cuando al dividir el plano a que pertenece por una recta que pase por sus orígenes, quedan los dos vectores en el mismo semiplano.

Esto establecido, *llamamos vectores equipolentes aquellos que tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.*

Geométricamente, los vectores equipolentes se representan por lados opuestos de un paralelogramo. Ejemplo, los vectores AB y $A'B'$ (fig. 64) son equipolentes, así como AA' y BB' de la misma figura.

Para expresar que AB y $A'B'$ son equipolentes se escribe $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

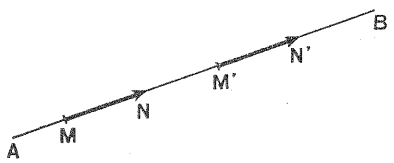


FIG. 63

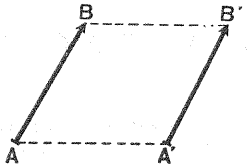


FIG. 64

142. Vectores libres, deslizantes y ligados. — Vectores *libres* son aquellos cuyo punto de aplicación se puede trasladar a cualquier otro punto, con tal de que el vector se conserve equipolente con el de la primera posición.

Vectores *deslizantes* son aquellos cuyo punto de aplicación puede ser cualquiera de los de su recta de acción; por ejemplo, los *MN* y *M'N'* (figura 63).

Vectores *ligados* son aquellos cuyo módulo depende del punto de aplicación, que, por consiguiente, se considera en ellos fijo.

143. Igualdad de vectores. — Dos vectores libres son iguales o equipolentes, si tienen la misma dirección o dirección paralela, la misma longitud y el mismo sentido, pudiendo tener distinto el punto de aplicación (figura 65, *a*).

Dos vectores deslizantes son iguales cuando tienen la misma longitud, el mismo sentido y los soporta la misma recta (fig. 65, *b*).

Cuando dos vectores difieren solamente en el sentido, se llaman *opuestos* (fig. 65, *d*), y si tienen el mismo soporte reciben el nombre de *directamente opuestos* (fig. 65, *e*).

144. Adición de vectores. — Con los vectores libres se pueden efectuar las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación, como vamos a ver.

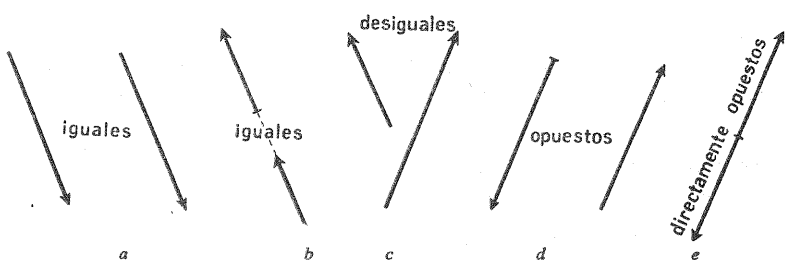


FIG. 65

Dados dos vectores a y b (fig. 66), si por un punto cualquiera A trazamos un vector AB equipolente o igual al primero, y a partir del extremo B trazamos otro igual al segundo, *el vector* AC *cuyo origen es el origen del primero y cuyo extremo es el extremo del segundo, se llama suma de los vectores dados.*

Caso particular de éste es la suma de dos vectores opuestos, que es nula; o sea, $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$.

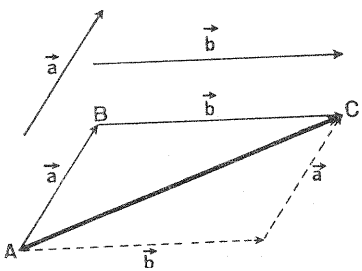


FIG. 66

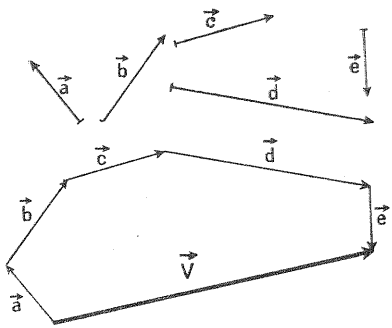


FIG. 67

La suma de varios vectores a, b, c, d y e (fig. 67), se obtiene efectuando la suma de los dos primeros con el tercero, el resultado hallado con el cuarto, y así sucesivamente hasta acabarlos todos. En la práctica, no es necesario obtener las sumas parciales, y la aplicación reiterada de la regla dada para cuando son dos los vectores, *equivale a formar un contorno poligonal cuyos lados representen vectores equipolentes a los dados; el vector* V, *determinado por el origen del primero y el extremo del último, es la suma que se busca.* Diremos:

$$\vec{V} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$$

Definida así la suma de vectores, tiene las propiedades esenciales de la adición de números: *uniforme, asociativa* y *conmutativa.*

145. Sustracción de vectores. — *Diferencia de dos vectores concurrentes es otro vector que sumado con el segundo nos da el primero.*

Dados los vectores a y b (fig. 68), para hallar su diferencia, basta sumar al minuendo el vector $(-b)$, opuesto al sustraendo, ya que

$$[\vec{a}+(-\vec{b})] + \vec{b} = \vec{a} + [(-\vec{b})+\vec{b}] = \vec{a}$$

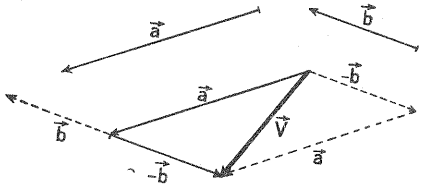


FIG. 68

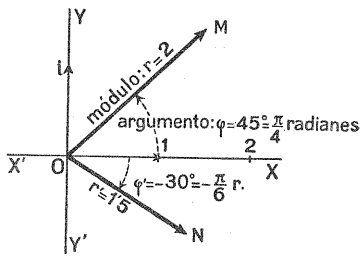


FIG. 69

146. Módulo y argumento de un vector. — Para determinar numéricamente a un vector, lo primero que haremos será medir su longitud, tomando como unidad un segmento fijo, y luego referiremos su dirección y sentido a una dirección y sentido también fijos.

Los elementos fijos de referencia mencionados, longitud, dirección y sentido, se representan por un vector que llamaremos *vector unidad* y designaremos por 1.

Esto supuesto, *llamamos módulo de un vector a la medida de su longitud comparada con la del vector unidad.*

Y denominamos argumento de un vector al ángulo que forma con el vector unidad, trasladados ambos al mismo origen. Los argumentos se expresan en grados o en radianes [1].

Se consideran *positivos* los argumentos o ángulos recorridos, a partir del vector unidad, en sentido opuesto a las agujas de un reloj; v. g., el *OM* de la figura 69, y *negativos* los recorridos en el mismo sentido, como el *ON* de la misma figura.

147. Expresión polar de un vector. — Un vector queda determinado cuando se conoce su módulo y su argumento. Esta manera de caracterizar a un vector, valiéndose de su módulo y su argumento, se llama *expresión polar del vector,* o también, *forma módulo-argumental.*

Hay que tener en cuenta que el módulo es esencialmente positivo, y que a cada vector le corresponde solamente un módulo.

---

(1) Recordemos que *radián* es el arco cuya longitud es igual a la del radio con que está trazado. Decir que la medida de un arco, o de un ángulo, es x radianes, significa según esto que el radio r está contenido en dicho arco x veces. Siendo $2\pi r$ la longitud de la circunferencia, tendremos las siguientes equivalencias:

$$360° = 2\pi \text{ radianes}, \quad 270° = \frac{3\pi}{2} \text{ radianes}, \quad 180° = \pi \text{ radianes}, \quad 90° = \frac{\pi}{2} \text{ radianes}$$

El argumento, en cambio, puede ser positivo o negativo, según el sentido en que se considere el ángulo. Un mismo vector puede tener un número indefinido de argumentos, diferenciándose uno de otro en una o más circunferencias. De modo que, si designamos por φ al menor de ellos, la expresión general que comprende a todos es

$$\varphi + 2k\pi, \quad \text{o bien,} \quad \varphi + k\,360°$$

en donde k representa un número entero, positivo, negativo o nulo.

Si r es el módulo de un vector y φ el argumento, la expresión polar del mismo se escribe así: r_φ. Según esto, la expresión polar o módulo-argumental de los vectores *OM*, *ON* e *i* de la figura 69, será, respectivamente:

$$2_{\frac{\pi}{4}} \text{ ó } 2_{45°}; \qquad 1'5_{-\frac{\pi}{6}} \text{ ó } 1'5_{-30°}; \qquad 1_{\frac{\pi}{2}} \text{ ó } 1_{90°}$$

El decir que un vector no puede tener más que un solo módulo, y que los argumentos de un mismo vector difieren en $2k\pi$, equivale a afirmar que *dos vectores son iguales cuando tienen módulos iguales y argumentos iguales, o cuya diferencia sea* $2k\pi$ (k entero, positivo o negativo).

Así, para que $r_\varphi = r'_{\varphi'}$
ha de ser $r = r'$ y $\varphi = \varphi' + 2k\pi$

148. El vector *i*. — El vector cuyo módulo es 1 y cuyo argumento es 90°, o $\frac{\pi}{2}$ radianes, se designa con la letra *i* (fig. 69). Su importancia, como veremos, estriba en ser la unidad de los llamados *números imaginarios.*

EJERCICIOS

Representar los vectores cuyo módulo y argumento se especifican:

361. V_1: $r = 3$ cm., $\varphi = 45°$ **364.** V_4: $r = 3'5$ cm., $\varphi = 180°$

362. V_2: $r = \frac{3}{2}$ cm., $\varphi = 60°$ **365.** V_5: $r = 4$ cm., $\varphi = 0°$

363. V_3: $r = 2$ cm., $\varphi = 135°$ **366.** V_6: $r = 3$ cm., $\varphi = 90°$

Con los vectores de los ejercicios anteriores, practicar las operaciones que se indican:

367. $V_1 + V_2 + V_3$ **369.** $V_3 - V_4$ **371.** $V_3 - V_5 + V_2 - V_4$

368. $V_3 - V_2$ **370.** $V_6 - V_5$ **372.** $V_2 - V_3 - V_5 + V_6 + V_1$

Representar los vectores que se deducen de las fórmulas generales siguientes:

373. $2_{\frac{180° + k\,360°}{4}}$ **374.** $2_{\frac{0° + k\,360°}{6}}$ **375.** $2_{\frac{90° + k\,360°}{4}}$

20. Operaciones con vectores

149. Multiplicación de vectores. — *Llamamos producto de dos o más vectores, al vector que tiene por módulo el producto de los módulos de los factores y por argumento, la suma de los argumentos.*

En símbolos, se tiene que

$$r_\varphi \cdot r'_{\varphi'} \cdot r''_{\varphi''} = (rr'r'')_{\varphi+\varphi'+\varphi''}$$

CASOS PARTICULARES. — Estos dos son los principales: 1.°, *multiplicación por el vector* 1; 2.°, *multiplicación por el vector* i.

El producto de un vector por el vector $1 = 1_{0°}$, es igual al vector dado, ya que su módulo no cambia al multiplicarlo por 1, ni su argumento se modifica al sumarle 0°.

Multiplicar un vector por el vector $i = 1_{90°}$, equivale a girarlo 90° en sentido positivo, ya que su módulo no cambia al multiplicarlo por 1, y su argumento queda aumentado en 90°.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA. — *El vector producto se construye de modo que sea al multiplicando lo que el multiplicador es respecto de la unidad.*

Para aclarar este concepto, construyamos el vector producto tal como se ha indicado en la definición. Sean los vectores que queremos multiplicar $r_\varphi = OV$ y $r'_{\varphi'} = OV'$ (fig. 70). Para sumar los argumentos, llevamos el ángulo φ' a continuación de φ. Sobre el rayo de argumento $\varphi + \varphi'$, se hallará el vector producto.

Para determinar el módulo de este vector producto, llevemos sobre OV', a partir de O, un segmento $OU = 1$. Y sobre OP, a partir de O, un segmento $OV'' = OV$. Unamos U con V'', y por V' tracemos el segmento $V'P$ paralelo a UV'', el cual determina el punto P.

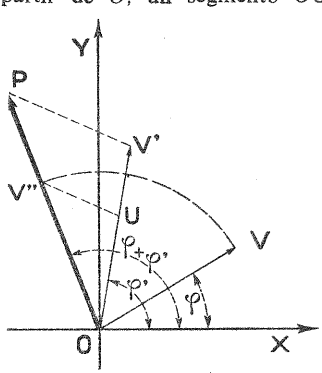


FIG. 70

De la semejanza de los triángulos OUV'' y $OV'P$, se deduce:

$$\frac{OP}{OV''} = \frac{OV'}{OU},$$

de donde, $OP = OV'' \times OV'$, ya que $OU = 1$.

Luego, el vector OP es el producto buscado, porque su módulo es el producto de los módulos, y su argumento, la suma de los argumentos.

150. División de vectores. — Siendo la división operación inversa del producto, la definiremos así: *Cociente de dos vectores es otro vector que, multiplicado por el vector divisor, da el vector dividendo.*

De esta definición se deduce que *el vector cociente ha de tener por módulo el cociente de los módulos, y por argumento, la diferencia de los argumentos del dividendo y divisor.*

En efecto: supongamos que $r_\varphi : r'_{\varphi'} = r''_{\varphi''}$. Por definición, ha de ser

$$r_\varphi = r'_{\varphi'} \times r''_{\varphi''} = (r'r'')_{\varphi'+\varphi''}$$

de donde resulta (núm. 147), que

$r = r'r''$ y $\varphi = \varphi' + \varphi''$; y de aquí: $r'' = r : r'$ y $\varphi'' = \varphi - \varphi'$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA. — Sea OP el vector dividendo y OV' el vector divisor (fig. 70). Construyamos el ángulo $XOV = V'OP$, que será la diferencia de los argumentos XOP y XOV', correspondientes al dividendo y al divisor. El ángulo XOV es, por tanto, el argumento del cociente. Sobre el rayo OV, con dicho argumento, se hallará el vector cociente.

Para determinar el módulo, llevemos sobre OV' el segmento $OU = 1$. Unamos luego V' con P, y tracemos por U la paralela UV'' a la recta $V'P$. De la semejanza de los triángulos OUV'' y $OV'P$, se deduce:

$$\frac{OV''}{OU} = \frac{OP}{OV'} \quad \text{y tomando } OV = OV'' \text{ y sustituyendo: } \quad \frac{OV}{1} = \frac{OP}{OV'}$$

Es decir: el vector OV es el cociente buscado, porque su módulo es el cociente de los módulos, y su argumento, la diferencia de los argumentos.

151. Potencia de un vector. — Por ser la potenciación un caso particular del producto, podemos poner:

$$(r_\varphi)^n = r_\varphi \times r_\varphi \times r_\varphi \times \ldots = (rrr\ldots)_{\varphi+\varphi+\varphi+\ldots} = (r^n)_{n\varphi}$$

Luego, *la potencia* n*-sima de un vector es otro vector cuyo módulo es la potencia* n*-sima del módulo, y cuyo argumento es igual a* n *veces el argumento del vector dado.*

REPRESENTACIÓN GRÁFICA. — Consideremos, por ejemplo, el vector $OV = 2_{40°}$ (figura 71) y elevémoslo al cubo o tercera potencia.

Como el argumento de la potencia ha de ser $n\varphi$, en este caso $3 \times 40° = 120°$, construiremos un ángulo de 120°, el XOP; y como el módulo ha de ser r^n, en este caso $2^3 = 8$, llevaremos sobre el rayo de argumento 120° ocho veces la unidad. El vector OP será la potencia pedida.

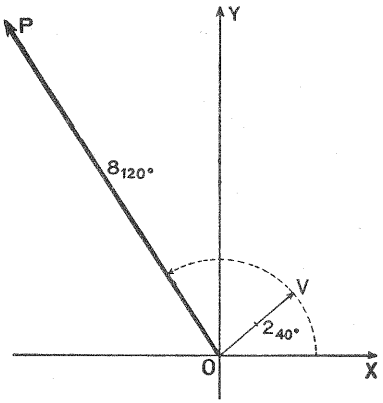


FIG. 71

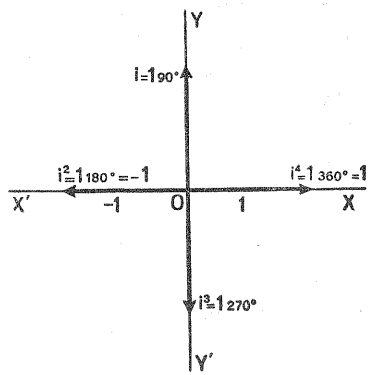


FIG. 72

POTENCIAS DEL VECTOR i. — Teniendo en cuenta que el módulo de i es 1 y el argumento 90°, tendremos que las sucesivas potencias del vector i, son:

$$i;\quad i^2=(1_{90°})^2=1_{180°}=-1;\quad i^3=(1_{90°})^3=1_{270°}=-i;$$
$$i^4=(1_{90°})^4=1_{360°}=1;\quad i^5=i^4\cdot i=1_{360°}\times 1_{90°}=1_{360°+90°}=i;\quad \ldots$$

como se ve en la figura 72. Obsérvese que los argumentos que obtendríamos a partir de i^5, difieren de los ya obtenidos en 360°, o en sus múltiplos, y, por consiguiente, no dan vectores nuevos. Esto nos dice que las potencias sucesivas del vector i se reproducen periódicamente, habiendo únicamente cuatro distintas.

152. Radicación de vectores. — Como operación inversa que es de la potenciación, la definiremos así: *Raíz* n-*sima de un vector es otro vector que, elevado a la potencia* n-*sima, produce el primero.*

De esta definición se deduce que *el vector raíz ha de tener por módulo la raíz* n-*sima del módulo del vector radicando, y por argumento, el cociente del argumento de dicho vector, por el índice de la raíz.*

En efecto: supongamos que $\sqrt[n]{R_\Phi}=r_\varphi$. Por definición, ha de ser

$$(r_\varphi)^n=(r^n)_{n\varphi}=R_\Phi$$

de donde resulta (núm. 147), que $r^n=R$ y $n\varphi=\Phi$ y de aquí:

$$r=\sqrt[n]{R}\quad \text{y}\quad \varphi=\frac{\Phi}{n} \qquad [1]$$

Vimos también en el núm. 147, que un mismo vector puede tener un número indefinido de argumentos, diferenciándose uno de otro en una o más circunferencias, es decir, en 2π, o en alguno de sus múltiplos. Recordemos que la expresión general de tales argumentos, es

$$\varphi + 2k\pi \text{ (en radianes)}, \quad \text{o bien,} \quad \varphi + k\,360° \text{ (en grados)}$$

en donde k es un número entero, positivo o negativo.

Según esto, el vector R_Φ, del que queremos hallar la raíz n-ésima, irá expresado, en su forma completa, por $R_{\Phi + 2k\pi}$, es decir, que sus argumentos serán:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi \\ \Phi + 1 \times 2\pi \\ \Phi + 2 \times 2\pi \\ \Phi + 3 \times 2\pi \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi + (n-1)\,2\pi \end{array}\right\}$$

En efecto: todos estos ángulos, obtenidos dando a k los valores 0, 1, 2, 3, ... n, en la expresión $\Phi + 2k\pi$, señalan la misma inclinación para el vector R, ya que sólo se diferencian en un número exacto de circunferencias.

El argumento del vector raíz se obtendrá dividiendo por n cada uno de estos argumentos, según nos indica la fórmula [1] antes hallada. Designando por φ_1, φ_2, φ_3, ... φ_n, los cocientes que resulten, tendremos que los argumentos del vector raíz serán:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 = \dfrac{\Phi}{n} \\ \varphi_2 = \dfrac{\Phi}{n} + 1 \times \dfrac{2\pi}{n} \\ \varphi_3 = \dfrac{\Phi}{n} + 2 \times \dfrac{2\pi}{n} \\ \varphi_4 = \dfrac{\Phi}{n} + 3 \times \dfrac{2\pi}{n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_n = \dfrac{\Phi}{n} + (n-1)\dfrac{2\pi}{n} \end{array}\right\}$$

Todos estos ángulos son, pues, argumentos de la raíz n-sima de R_Φ, y como representan inclinaciones distintas, darán lugar a otros tantos vectores distintos, si bien todos ellos tienen el mismo módulo $\sqrt[n]{R}$.

Para deducir cuántas raíces n-simas distintas pueden hallarse, observemos que cada uno de estos argumentos se diferencia del anterior en una n-sima parte de la circunferencia. Por tanto, cuando hayamos formado n argumentos distintos, veremos que se van repitiendo por orden todos los obtenidos anteriormente.

Luego, *el número de raíces* n-*simas de un vector es igual al índice* n de la raíz.

Veámoslo en el siguiente ejemplo: *Hallar las raíces cúbicas de* R El módulo de las varias soluciones será $\sqrt[3]{R}$, y los argumentos:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{\Phi}{3}\\ \varphi_2 &= \frac{\Phi}{3} + \frac{2\pi}{3}\\ \varphi_3 &= \frac{\Phi}{3} + 2 \times \frac{2\pi}{3}\end{aligned}\right\} \text{ Inclinaciones distintas}$$

$$\varphi_4 = \frac{\Phi}{3} + 3 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{\Phi}{3} + 2\pi \text{ (Misma inclinación que } \varphi_1)$$

$$\varphi_5 = \frac{\Phi}{3} + 4 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{\Phi}{3} + \frac{2\pi}{3} + 3 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{\Phi}{3} + \frac{2\pi}{3} + 2\pi \text{ (Inclinación de } \varphi_2)$$

.....

Hay, como se ve, tres inclinaciones distintas, repitiéndose las demás a partir de la cuarta. Luego, existen tres raíces cúbicas de R_Φ que son:

$$\left(\sqrt[3]{R}\right)_{\frac{\Phi}{3}} \qquad \left(\sqrt[3]{R}\right)_{\frac{\Phi}{3} + \frac{2\pi}{3}} \qquad \left(\sqrt[3]{R}\right)_{\frac{\Phi}{3} + 2 \times \frac{2\pi}{3}}$$

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA. — Supongamos que se trata de hallar gráficamente las raíces cúbicas del vector $8_{120°}$ (fig. 73).

Haciendo centro en el origen de coordenadas, tracemos una circunferencia de radio $\sqrt[3]{8} = 2$, la cual señalará el extremo de los tres vectores raíces que habremos de obtener.

Señalemos luego el arco $AB = \frac{120°}{3} = 40°$, y a partir del punto B dividamos a la circunferencia en tres partes iguales; obtenemos así los puntos B, C y D, extremos de los vectores OB, OC y OD, que corresponden a las tres raíces cúbicas del vector OR.

Efectivamente: los módulos de esos tres vectores valen $\sqrt[3]{8} = 2$, y los argumentos son

$$\frac{120°}{3} = 40°, \qquad \frac{120°}{3} + \frac{2\pi}{3} = 40° + 120°$$

$$\text{y} \quad \frac{120°}{3} + 2 \times \frac{2\pi}{3} = 40° + 240°$$

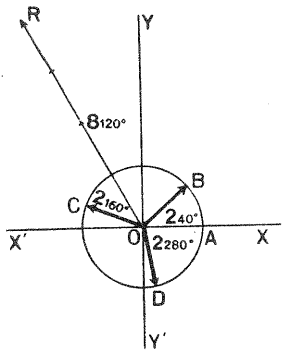


FIG. 73

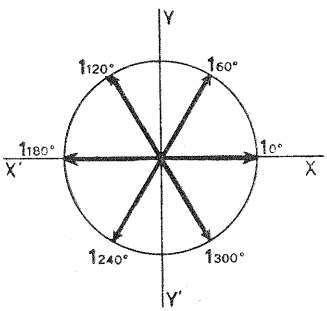


FIG. 74

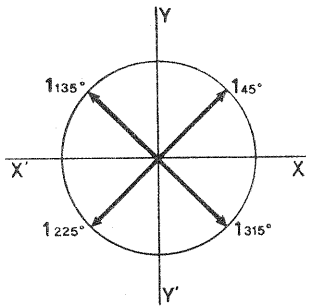


FIG. 75

153. Raíces de la unidad. — Como la unidad positiva está representada por un vector de módulo 1 y argumento 0°, sus n raíces n-simas tendrán por módulo 1, y los argumentos valdrán, respectivamente,

$$0;\ \frac{2\pi}{n};\ 2\times\frac{2\pi}{n};\ 3\times\frac{2\pi}{n};\ \ldots\ (n-1)\frac{2\pi}{n}$$

Es decir, que el problema de hallar las raíces n-simas de la unidad, se resuelve dividiendo en n partes iguales a la circunferencia de radio igual a 1, partiendo del extremo del vector $1_{0°}$, y tomando luego 0, 1, 2, 3, ... $(n-1)$ de esas partes, respectivamente. La figura 74 representa las raíces sextas de la unidad positiva, es decir, del vector $1_{0°}$.

NOTA. — Al estudiar los números complejos, veremos que:

1.° *Entre las raíces* PARES *de* $+1$, *hay dos que son reales,* $+1$ *y* -1.

2.° *Entre las raíces* IMPARES *de* $+1$, *sólo hay una que es real,* $+1$.

El vector que representa a la unidad negativa tiene por módulo 1 y por argumento π ó 180°; luego, las n raíces n-simas de -1, tendrán por módulo 1, y sus argumentos valdrán, respectivamente,

$$\frac{\pi}{n};\ \frac{\pi}{n}+\frac{2\pi}{n};\ \frac{\pi}{n}+2\times\frac{2\pi}{n};\ \frac{\pi}{n}+3\times\frac{2\pi}{n};\ \ldots\ \frac{\pi}{n}+(n-1)\frac{2\pi}{n}$$

o bien, simplificando,

$$\frac{\pi}{n};\ \frac{3\pi}{n};\ \frac{5\pi}{n};\ \frac{7\pi}{n};\ \ldots\ \frac{(2n-1)\pi}{n}$$

Obtendremos, pues, el argumento dividiendo a la circunferencia en n partes iguales, comenzando por el extremo del arco π/n, y tomando luego, respectivamente, 1, 2, 3, ... n de esas partes. En la figura 75 se han obtenido las raíces cuartas de -1, es decir, del vector $1_{\pi} = 1_{180°}$.

NOTAS. — 1.ª Comprendemos ahora cómo es posible, mediante los vectores, resolver el problema de la extracción de raíces de índice par de cantidades negativas.

2.ª Al estudiar los números complejos, veremos que:

1.° *Entre las raíces* PARES *de* -1, *no hay ninguna que sea real.*

2.° *Entre las raíces* IMPARES *de* -1, *sólo hay una que es real,* -1.

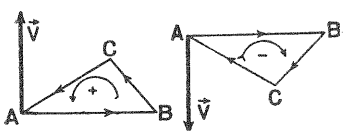


FIG. 76

154. Área orientada. — Del mismo modo que se orienta un segmento y se habla de longitudes positivas y negativas, se puede atribuir un signo a las áreas de las figuras.

El área del triángulo ABC (fig. 76), por ejemplo, dependerá del sentido en que se recorra su contorno. Así, son iguales los valores

$$\text{área } ABC = \text{área } BCA = \text{área } CAB \quad \text{(fig. 76, } a \text{ y } b\text{)}$$

Ahora bien, si recorremos el contorno en sentido opuesto al anterior, también al área habremos de atribuirle signo contrario. Según esto, los tres valores siguientes son opuestos a los tres escritos anteriormente:

$$\text{área } ACB = \text{área } CBA = \text{área } BAC \quad \text{(fig. 76, } a \text{ y } b\text{)}$$

Para orientar las áreas se tiene en cuenta el siguiente convenio: *Un área se considera positiva cuando su contorno está recorrido en sentido directo, esto es, contrario a las agujas de un reloj, y negativa cuando el contorno se recorre en sentido inverso.*

Podemos representar el área de una superficie por un vector V perpendicular a ella, y orientado de tal modo que un imaginario observador, cuyos pies se hallasen en el origen del vector y la cabeza en el extremo del mismo, viese describir el contorno de la figura en sentido directo o positivo.

EJERCICIOS

Dados los vectores: $V_1 = 3_{30°}$; $V_2 = 2_{60°}$; $V_3 = 1_{120°}$; $V_4 = 4_{135°}$; *efectuar analítica y gráficamente las siguientes operaciones:*

376. $V_1 \times V_2$ **378.** $V_3 : V_2$ **380.** $(V_2)^3$

377. $V_1 \times V_2 \times V_3$ **379.** $V_4 : V_3$ **381.** $\sqrt{V_4}$

382. Hallar analítica y gráficamente las raíces quintas de 1.

383. Ídem las raíces cúbicas de -1.

21. Los números complejos

155. Sucesivas ampliaciones del concepto de número. — La operación más sencilla en Matemáticas es, sin duda, la de contar. Para realizarla se precisa únicamente el más sencillo de los números, el número *natural*, es decir, el número entero positivo.

Al intentar efectuar la operación de restar de un número menor otro mayor, hubo que inventar los números *negativos*. Éstos y los naturales forman el campo de los números *enteros*.

Para expresar una división en la que el dividendo es menor que el divisor, o para dar exactamente el cociente de una división cuando el dividendo no es múltiplo del divisor, se inventaron los números *fraccionarios*. Estos números y los enteros forman el campo de los *racionales*.

Para resolver raíces inexactas, la relación de la circunferencia al diámetro, y otros problemas, hubo necesidad de inventar los números *irracionales* o *inconmensurables*. Éstos y los racionales constituyen el campo de los *números reales*.

Pero quedan aún ciertos problemas y operaciones que no tienen solución si no creamos nuevos símbolos, llamados números *imaginarios*. Así, por ejemplo, diremos de $\sqrt{-2}$ que es un número imaginario, pues las raíces pares de números negativos no tienen existencia en el campo de los números reales. Los números imaginarios, junto con los números reales, forman el campo de los números *complejos*.

CUADRO RESUMEN DEL NÚMERO

ORIGEN	DENOMINACIÓN	CLASIFICACIÓN		
Operación de contar	*natural*	*enteros*	*racionales*	*reales* — *complejos*
Minuendo < sustraendo	*entero negativo*			
Dividendo < divisor Divisiones inexactas	*fraccionario*			
Raíces inexactas ($\sqrt{2}$) Magnitudes inconmensurables (π)	*irracional* o *inconmensurable*			
Raíces pares de números negativos	*imaginario*			

EJEMPLO DE NÚMERO COMPLEJO. — Tratemos de resolver la ecuación de segundo grado $x^2 + 2x + 5 = 0$. Tendremos:

$$x' = \frac{-2 + \sqrt{-16}}{2} = -1 + \frac{\sqrt{-16}}{2}; \quad x'' = \frac{-2 - \sqrt{-16}}{2} = -1 - \frac{\sqrt{-16}}{2}$$

Por resultar negativo el discriminante, decíamos hasta ahora que la ecuación carecía de soluciones reales. En adelante, diremos que las raíces de la ecuación son dos números complejos.

156. Unidad imaginaria. — Se denomina *unidad imaginaria* al símbolo $\sqrt{-1}$, y se define como el número que multiplicado por sí mismo da -1; esto es:

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

Para abreviar la escritura, representaremos el nuevo símbolo $\sqrt{-1}$ por la letra i. Con esto, puede escribirse:

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = 3\sqrt{-1} = 3i$$

$$\sqrt{-12} = \sqrt{12 \cdot (-1)} = \sqrt{12} \cdot \sqrt{-1} = 2\sqrt{3}\,i$$

$$3 \pm \sqrt{-4} = 3 \pm \sqrt{4 \cdot (-1)} = 3 \pm 2\sqrt{-1} = 3 \pm 2i$$

POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA. — Acabamos de decir que por definición,

$$i = \sqrt{-1} \qquad \text{e} \qquad i^2 = -1$$

De acuerdo con esto, tendremos:

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

A partir de aquí, los valores de las sucesivas potencias de i se repiten en períodos de cuatro, es decir, volverán a obtenerse los valores i, -1, $-i$ y 1.

En efecto: de la última igualdad se deduce

$$i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1,$$

de donde

$$i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = 1 \cdot i = i$$
$$i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$
$$i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$

Luego, las potencias sucesivas de i *se reproducen periódicamente, y para calcular una cualquiera bastará dividir por* 4 *su exponente y hallar la potencia de* i, *cuyo exponente sea el resto de la división.*

Así,

$$i^7 = i^3 = -i \qquad i^{34} = i^2 = -1$$
$$i^{28} = i^0 = 1 \qquad i^{57} = i^1 = i$$

157. Números complejos. — Se llaman *números complejos* las expresiones de la forma $a + bi$, donde a y b son dos números reales e i tiene el significado dado en el párrafo anterior. Ejemplos:

$$2 + 3i; \qquad 7 - 2i; \qquad 5i \text{ (aquí } a=0); \qquad \tfrac{2}{3} + \tfrac{5}{8}i$$

Esta forma de representar un número complejo, se llama forma *binómica.*

Las raíces de una ecuación de segundo grado cuyo discriminante es negativo (ver ejemplo del núm. 155), son números complejos.

En el número complejo $a + bi$, donde a y b representan números reales cualesquiera, a es el primer componente, o componente real, del número complejo, y bi es el segundo componente, o componente imaginario.

Además de la notación $a + bi$, los números complejos se representan también por el componente real seguido del imaginario sin el símbolo i, separados por una coma y encerrados en un paréntesis. Así: (a, b).

Esta forma de representar un número complejo, expresando sus componentes como si fueran las coordenadas cartesianas de un punto, se llama *forma cartesiana.*

De aquí que se defina también al número complejo de este modo:

> **Número complejo es un par de números reales (a, b) dados en un orden prefijado.**

Cuando el componente imaginario es nulo, entonces el número complejo representa al número real que indica el primer componente. Así,

$$(a, 0) = a; \qquad (5, 0) = 5; \qquad (-2, 0) = -2$$

El cero se representa por (0, 0).

Si el componente real es nulo, entonces el número complejo se llama *imaginario puro,* v. g.: $(0, 4) = 4i$.

La unidad imaginaria se representa por (0, 1).

De este modo, tanto los números reales como los imaginarios puros pueden considerarse como casos particulares de los números complejos, y la forma más general del número será, por consiguiente, la del número complejo.

158. Significación vectorial del número complejo. — Supuestas dos rectas perpendiculares, XX' e YY' (fig. 77) tomadas como ejes cartesianos, todo punto del plano, el (3, 2) por ejemplo, queda determinado por su abscisa y ordenada, las cuales, escritas en el orden indicado, constituyen un número complejo.

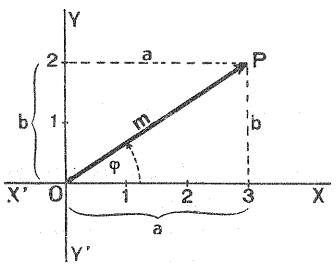


FIG. 77

Viceversa: a cada número complejo, v. g. el (3, 2), le corresponde un punto P en el plano cuyas coordenadas son los componentes de dicho número. De este modo, todo complejo (sea real o imaginario) viene representado por un punto del plano, y por uno sólo, que se denomina *afijo* del complejo.

Es evidente, por otra parte, que a todo punto P del plano le corresponde un vector OP, y recíprocamente.

Pues bien, siempre que queramos representar a un número complejo, lo haremos por medio de un vector, cuyo origen sea el origen de coordenadas, y tenga por extremo el punto determinado por el complejo.

*(1) **159. Relación entre los componentes de un número complejo y los elementos del vector que le corresponde.** — Cualquiera que sea el número complejo, el módulo del vector correspondiente representa la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son los componentes del complejo. Según esto, tendremos las siguientes relaciones (fig. 77):

$$a = m \cos \varphi \qquad b = m \operatorname{sen} \varphi$$

$$m = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{o} \quad m = \frac{a}{\cos \varphi};$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{m}; \qquad \operatorname{sen} \varphi = \frac{b}{m}; \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

(1) Los párrafos precedidos de asterisco, en la presente lección, deberán reservarse para después de hecho el estudio de la Trigonometría.

Las dos primeras fórmulas nos permiten hallar los componentes de un número complejo, cuando se conocen el módulo y argumento del vector que le corresponde; y con las restantes, podemos *modular* un complejo, es decir, conocidos sus componentes, podemos calcular el módulo y el argumento del vector correspondiente.

OBSERVACIÓN. — Cuando a y b son números sencillos, se calcula m por la fórmula $m = \sqrt{a^2+b^2}$; pero si dichos números son grandes, la fórmula de Pitágoras no resulta práctica por no ser calculable por logaritmos. Convendrá en este caso hallar primero el argumento φ por la fórmula

$$\text{tg } \varphi = \frac{b}{a}, \text{ y luego se calcula } m \text{ por la fórmula } m = \frac{a}{\cos \varphi}$$

*** 160. Forma factorial, trigonométrica o polar de un número complejo.** — Teniendo en cuenta las fórmulas anteriormente obtenidas,

$$a = m \cos \varphi \qquad \text{y} \qquad b = m \operatorname{sen} \varphi$$

la forma binómica $a + bi$ de expresar un número complejo, se convierte en esta otra

$$a + bi = m \cos \varphi + m \cdot i \cdot \operatorname{sen} \varphi = m(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

llamada *forma factorial, trigonométrica* o *polar.*

Existe otra forma más breve de expresar un número complejo por los elementos del vector que le corresponde; es la siguiente: m_φ, que, como se ve, está compuesta por el módulo m llevando el argumento φ como subíndice. A esta forma la llamamos ya en otra parte (núm. 147) *forma módulo-argumental.*

Resumiendo, he aquí todas las formas de expresar un número complejo o su vector correspondiente:

$$\boxed{(a,\ b) = a + bi = m(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) = m_\varphi}$$

Resulta fácil pasar de una a otra forma, teniendo en cuenta las fórmulas deducidas en el párrafo anterior.

161. Números complejos iguales, conjugados y opuestos. — *Dos números complejos son iguales cuando tienen respectivamente iguales los primeros y los segundos componentes.*

Es decir, que

$$(a,\ b) = (a',\ b') \quad \text{si} \quad a = a' \quad \text{y} \quad b = b'$$

De no reunir estas dos condiciones, se dice que los complejos son *desiguales.*

Dos complejos son conjugados cuando tienen iguales sus primeros componentes y opuestos los segundos. El conjugado de $(a,\ b)$ es $(a,\ -b)$.

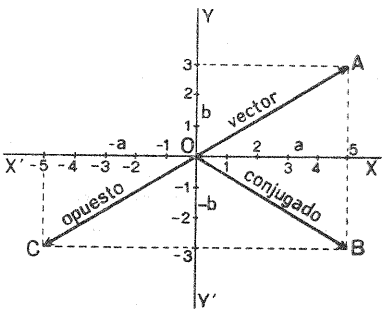


FIG. 78

Así, son conjugados (5, 3) y (5, −3) que, como se ve en la figura 78, están representados por dos vectores, OA y OB, simétricos respecto del eje XX'.

Las raíces de una ecuación de segundo grado cuyo discriminante es negativo, son dos números complejos conjugados. Ver ejemplo del núm. 155.

Dos complejos son opuestos cuando los componentes de uno son opuestos respecto de los correspondientes del otro. Así, $(a,\ b)$ y $(-a,\ -b)$ representan complejos opuestos.

Son opuestos los complejos (5, 3) y (−5, −3), representados en la figura 78 por los vectores opuestos OA y OC.

EJERCICIOS

Expresar los siguientes números imaginarios puros en forma de múltiplos de i:

384. $\sqrt{-16}$; $\sqrt{-9}$; $(-36)^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{-x^2}$; $3\sqrt{-2}$

385. $2\sqrt{-b}$; $\sqrt{6}\cdot\sqrt{-6}$; $\sqrt{2}\cdot\sqrt{-3}$; $\sqrt{5}\cdot\sqrt{-20}$; $3\,(-10)^{\frac{1}{2}}$

386. $\sqrt{a}\cdot\sqrt{-a^2}$; $\sqrt{-(a+b)^2}$; $\sqrt{-x^2-4x-4}$; $\sqrt{-y^2+8y-16}$; $\sqrt{-x^2-12x-36}$

387. Hallar los números complejos que son raíces de la ecuación

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

388. Hallar los números complejos que son raíces de la ecuación

$$x^2 - 9x + 27 = 0$$

389. Escribir inmediatamente el valor de las potencias de exponente 86, 149, 287 y 1072 de la unidad imaginaria.

390. ¿Cuáles son, en forma binómica, los complejos correspondientes a los vectores 1_0, $1_{\frac{\pi}{2}}$, 1_{π}, $1_{\frac{3\pi}{2}}$ y $1_{2\pi}$?

391. Representar sobre ejes coordenados distintos cada uno de los complejos siguientes, sus conjugados y sus opuestos:

$$(3, -5); \quad (-4, 6); \quad 5 + i; \quad 8i; \quad 1 - 2i; \quad 0'5 + 1'4i.$$

392. Calcular el módulo de los complejos dados en el ejercicio anterior.

* (1) **393.** Expresar en forma cartesiana los complejos siguientes (2):

$$8_{45°}; \quad 4_{120°}; \quad 5_{150°}; \quad 1_{200°}; \quad 7_{300°}$$

***394.** Expresar en forma cartesiana los complejos siguientes:

$$5_{\frac{\pi}{3}}; \quad 3_{\frac{2\pi}{3}}; \quad 3_{\frac{4\pi}{3}}; \quad 3_{\frac{5\pi}{3}}; \quad 3_{\frac{7\pi}{3}}$$

***395.** Escribir en forma binómica el complejo $2_{30°}$.

***396.** Modular el complejo (7, 12) y su conjugado. Ídem $(-2, 9)$ y su opuesto.

***397.** Escribir en forma vectorial el complejo (3, 8).

***398.** Dar en forma trigonométrica el complejo (4, −4), su conjugado y su opuesto.

***399.** Expresar en forma trigonométrica los complejos siguientes:

$$4i; \quad 1 - 2i; \quad \sqrt{2} + i; \quad 5 - 9i; \quad -1 + i.$$

***400.** Escribir en todas las formas posibles el complejo $(-6, 15)$, su conjugado y su opuesto.

---

(1) Los ejercicios de esta lección y la siguiente precedidos de asterisco deberán dejarse para después del estudio de la Trigonometría.

(2) Consúltese la *tabla de valores naturales de las razones trigonométricas* del final del libro.

22. Operaciones con números complejos

162. Leyes formales de las operaciones. — Las operaciones con números complejos han de gozar de las mismas propiedades que las operaciones con números reales. Para que esto suceda, las reglas de cálculo que vamos a establecer, deben cumplir las siguientes condiciones:

1.ª El símbolo i sustituye al símbolo $\sqrt{-1}$; es decir, debe entenderse siempre que $i^2 = -1$.

2.ª Las operaciones algebraicas (suma y resta; multiplicación y división; potenciación y radiación) entre las expresiones en que figura i se efectúan siguiendo las reglas ordinarias del cálculo algebraico, considerando los números complejos como binomios, con la condición de sustituir en el resultado i^2 por -1.

3.ª En el caso particular en que los números complejos considerados se reduzcan a números reales (por ser $b = 0$), las reglas de cálculo que se establezcan tienen que dar el mismo resultado que hubiésemos obtenido al operar según las reglas para el cálculo con números reales.

163. Adición de complejos. — Sea, por ejemplo,

$$(-2+3i) + (5+4i) + (9-5i)$$

Operando como si fueran binomios con la letra i, resulta:

$$-2 + 5 + 9 + 3i + 4i - 5i = 12 + 2i$$

Es decir: *Para sumar números complejos, se suman separadamente las partes reales y las imaginarias.*

En general:

$$(a+bi) + (a'+b'i) = (a+a') + (b+b')i$$

CASOS PARTICULARES. — 1.º La suma de dos números reales es un número real.

$$(a,\ 0) + (a',\ 0) = (a+a',\ 0)$$

2.º La suma de dos complejos conjugados es un número real, igual al duplo del primer componente.

$$(a+bi) + (a-bi) = a + a + bi - bi = 2a$$

3.º La suma de dos números opuestos es nula.

$$(a,\ b) + (-a,\ -b) = (0,\ 0) = 0$$

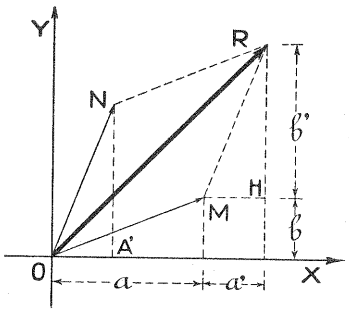


FIG. 79

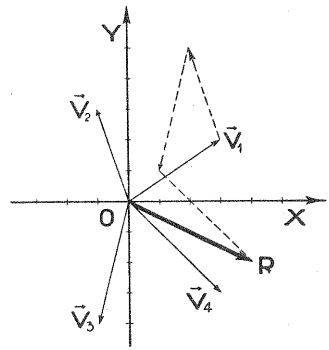


FIG. 80

Para efectuar gráficamente la suma de dos números complejos, se suman los dos vectores que los representan.

Sean los complejos $a + bi$, representado en la figura 79 por el vector OM, y $a' + b'i$, cuyo vector correspondiente es ON. El vector OR, que es la *resultante* o suma de OM y ON, representa, en efecto, la suma

$$(a+bi) + (a'+b'i) = a + a' + (b+b')\,i$$

como puede verse fácilmente en la figura.

Cuando son más de dos los sumandos, formaremos una línea quebrada, trazando desde el extremo del primer vector otro equipolente al segundo; por el extremo del vector así obtenido trazaremos otro equipolente al tercer sumando, y así sucesivamente hasta acabar con todos. La resultante de la quebrada que resulte, será la suma buscada.

En la figura 80 se ha hallado gráficamente la suma

$$(3,\ 2) + (-1,\ 3) + (-1,\ -4) + (3,\ -3) = (4,\ -2)$$

representada por la resultante OR.

164. Sustracción de complejos. — Siguiendo la regla general del Álgebra, restar dos complejos equivale a sumar al minuendo el opuesto del sustraendo.

Así,

$$(a,\ b) - (a',\ b') = (a,\ b) + (-a',\ -b') = (a-a',\ b-b')$$

ya que, en efecto, si al resultado obtenido se le suma el sustraendo, se obtendrá el minuendo.

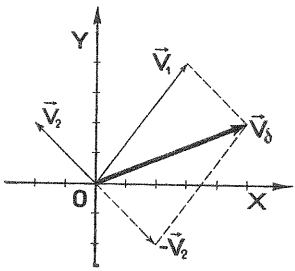


FIG. 81

Gráficamente, la diferencia de dos complejos se halla construyendo el vector opuesto del sustraendo y sumándole con el correspondiente del minuendo.

En la figura 81 se ha obtenido gráficamente la diferencia

$$(3, 4) - (-2, 2) = (5, 2)$$

165. Multiplicación de complejos expresados en forma binómica. — Los números complejos se multiplican como polinomios de primer grado en i, teniendo presente que $i^2 = -1$. Así:

$$(a+bi)(a'+b'i) = aa' + ba'i + ab'i + bb'i^2 = aa' - bb' + (ba'+ab')i$$

EJEMPLO. — Efectuar el producto $(2-\sqrt{-3})(4+5\sqrt{-3})$.

Después de expresar la parte imaginaria en forma de múltiplo de i, dispondremos así la operación:

$$\begin{array}{l} 2 - \sqrt{3}\,i \\ 4 + 5\sqrt{3}\,i \\ \hline 8 - 4\sqrt{3}\,i \\ \quad + 10\sqrt{3}\,i - 15\,i^2 \\ \hline 8 + 6\sqrt{3}\,i + 15 \end{array} = 23 + 6\sqrt{3}\,i$$

OBSERVACIÓN IMPORTANTE. — En el producto de complejos dados en la forma binómica, es imprescindible expresar la parte imaginaria en función de i, ya que la regla seguida en la multiplicación de radicales reales, no puede ser aplicada a los radicales imaginarios sin antes ponerlos en función de i.

En efecto: tratándose de radicales ordinarias, tenemos que

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$$

y, en cambio, el producto de dos números imaginarios, $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3}$, por ejemplo, no es igual a $\sqrt{(-2)\cdot(-3)}$, pues esto equivale a $\sqrt{6}$, mientras que, según acabamos de ver,

$$\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{2}\,i \cdot \sqrt{3}\,i = \sqrt{6}\,i^2 = -\sqrt{6}$$

El producto de un número complejo por su conjugado es un número real positivo, igual a la suma de los cuadrados de los componentes cartesianos a y b *de cualquiera de los factores.*

Se tiene, en efecto:

$$\begin{array}{l} a + bi \\ a - bi \\ \hline a^2 + abi \\ \quad - abi - b^2i^2 \\ \hline a^2 \qquad - b^2i^2 = a^2 + b^2 \end{array}$$

Así,

$$(3-5i)(3+5i) = 9 + 25 = 34$$

*** 166. Multiplicación de complejos expresados en la forma trigonométrica o en la forma módulo-argumental.** — Si los complejos van expresados en la forma trigonométrica, tendremos:

$$m(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) \times m'(\cos\varphi' + i \operatorname{sen}\varphi') =$$

(efectuando las operaciones indicadas)

$$= mm'(\cos\varphi\cos\varphi' + i \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi' + i\cos\varphi \operatorname{sen}\varphi' + i^2 \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varphi') =$$

(recordando que $i^2 = -1$, sacando i factor común y alterando el orden de los sumandos)

$$= mm'[\cos\varphi\cos\varphi' - \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varphi' + i(\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi')] =$$

teniendo en cuenta el desarrollo de cos $(\varphi+\varphi')$ y sen $(\varphi+\varphi')$

$$= mm'[\cos(\varphi+\varphi') + i \operatorname{sen}(\varphi+\varphi')] =$$

y en forma módulo-argumental:

$$= (mm')_{\varphi+\varphi'}$$

Podemos, pues, enunciar:

El producto de dos números complejos tiene por módulo el producto de los módulos de los factores, y por argumento, la suma de los argumentos.

Cuando hay más de dos factores, esta regla sigue siendo válida, es decir, que

$$m_\varphi \times m'_{\varphi'} \times m''_{\varphi''} = (mm'm'')_{\varphi+\varphi'+\varphi''} =$$
$$= mm'm''[\cos(\varphi+\varphi'+\varphi'') + i \operatorname{sen}(\varphi+\varphi'+\varphi'')]$$

La representación gráfica del producto de complejos se hará multiplicando los vectores correspondientes (núm. 149, fig. 70).

167. División de complejos expresados en forma binómica. — Por ser la división la operación inversa de la multiplicación, el complejo hallado para cociente ha de ser tal que, multiplicado por el divisor, produzca el dividendo. Consideramos dos casos:

PRIMER CASO: *El divisor es un número real.* Sea, por ejemplo

$$\frac{7-2i}{5} \quad \text{o bien} \quad \frac{a+bi}{n}$$

Para hallar el cociente, se dividen por el número real los dos componentes del complejo. Es decir:

$$\frac{7-2i}{5} = \frac{7}{5} - \frac{2}{5}i \quad \text{o bien} \quad \frac{a+bi}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}i$$

En efecto: multiplicando el cociente por el divisor, se obtiene el dividendo:

$$\left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n}i\right) \cdot n = \frac{a}{n} \cdot n + \frac{b}{n} \cdot ni = a + bi$$

SEGUNDO CASO: *El divisor es un número complejo.* Éste, que es el caso general, queda reducido al anterior si se multiplica el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor.

EJEMPLOS:

$$\frac{2+3i}{1-2i} = \frac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2+7i+6i^2}{1-4i^2} = \frac{-4+7i}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$$

$$\frac{5}{3-\sqrt{-2}} = \frac{5}{3-\sqrt{2}i} = \frac{5(3+\sqrt{2}i)}{(3-\sqrt{2}i)(3+\sqrt{2}i)} =$$

$$= \frac{15+5\sqrt{2}i}{11} = \frac{15}{11} + \frac{5\sqrt{2}}{11}i$$

En general:

$$\frac{a+bi}{a'+b'i} = \frac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2+b'^2} = \frac{(aa'+bb')+(a'b-ab')i}{a'^2+b'^2}$$

***168. División de complejos expresados en forma módulo-argumental y en forma trigonométrica.** — Teniendo en cuenta la definición de cociente y lo dicho en el núm. 166, habrá de ser

$$m_\varphi : m'_{\varphi'} = \left(\frac{m}{m'}\right)_{\varphi-\varphi'} \qquad \text{ya que} \qquad \left(\frac{m}{m'}\right)_{\varphi-\varphi'} \times m'_{\varphi'} = m_\varphi$$

Es decir, que *el cociente de dos números complejos tiene por módulo el cociente de los módulos, y por argumento, la diferencia de los argumentos.*

Igualmente, si dividimos el complejo $m(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$ por el $m'(\cos\varphi' + i\,\text{sen}\,\varphi')$, obtendremos, aplicando lo dicho en el número anterior y teniendo en cuenta el desarrollo de cos $(\varphi-\varphi')$ y sen $(\varphi-\varphi')$:

$$\frac{m(\cos\varphi+i\,\text{sen}\,\varphi)}{m'(\cos\varphi'+i\,\text{sen}\,\varphi')} = \frac{m}{m'} \times \frac{(\cos\varphi+i\,\text{sen}\,\varphi)(\cos\varphi'-i\,\text{sen}\,\varphi')}{(\cos\varphi'+i\,\text{sen}\,\varphi')(\cos\varphi'-i\,\text{sen}\,\varphi')} =$$

$$= \frac{m}{m'}[\cos(\varphi-\varphi')+i\,\text{sen}\,(\varphi-\varphi')]$$

La representación gráfica del cociente de dos números complejos se hará dividiendo los vectores correspondientes (núm. 150, fig. 70).

169. Potenciación de complejos. — I. EN FORMA BINÓMICA. — La potencia de un complejo expresado en forma binómica, podemos obtenerla por multiplicaciones sucesivas e interpretando luego en los resultados los valores de las potencias de i que aparezcan.

En el caso del cuadrado y del cubo, se obtiene, respectivamente:

$$(a+bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 = a^2 + 2abi - b^2 = (a^2-b^2) + 2abi$$

$$(a+bi)^3 = a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i =$$
$$= (a^3-3ab^2) + (3a^2b-b^3)i$$

Al estudiar la fórmula del binomio de Newton, veremos otro método más rápido de obtener el resultado, cuando se trate de exponentes mayores.

II. EN FORMA MÓDULO-ARGUMENTAL. — Como una potencia es un caso particular de la multiplicación, tendremos:

$$(m_\varphi)^n = m_\varphi \times m_\varphi \times m_\varphi \times \ldots = (m^n)_{n\varphi}$$

Luego, *la potencia* n*-sima de un número complejo tiene por módulo la potencia* n*-sima del módulo, y por argumento,* n *veces el argumento.*

*III. En forma trigonométrica. Fórmula de Moivre [1]. — Multiplicando sucesivamente, y suponiendo que n es un número natural, obtendríamos:

$$[m(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)]^n =$$
$$= [m(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)]\,[m(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)]\,[m(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)]\,\ldots =$$
$$= (mmm\ldots)[\cos(\varphi+\varphi+\varphi+\ldots) + i\,\text{sen}\,(\varphi+\varphi+\varphi+\ldots)] =$$
$$= m^n(\cos n\varphi + i\,\text{sen}\,n\varphi)$$

fórmula ésta muy importante, que se conoce con el nombre de *fórmula de Moivre.*

Esta fórmula es también válida para valores fraccionarios y negativos de n, aunque por ahora no demostramos tal generalización.

Ejemplo. — Calcular $(2_{60°})^7$ y su equivalente $[2\,(\cos 60° + i\,\text{sen}\,60°)]^7$

Tendremos:

$$(2_{60°})^7 = 2^7_{7\times 60°} = 128_{420°}$$
$$[2\,(\cos 60° + i\,\text{sen}\,60°)]^7 = 128\,(\cos 420° + i\,\text{sen}\,420°)$$

La representación gráfica de la potencia de un número complejo, se reduce a elevar a esa misma potencia el vector representativo de dicho número (núm. 151, fig. 71).

170. Radicación de complejos. — Para efectuar esta operación utilizaremos solamente las formas módulo-argumental y trigonométrica.

Teniendo en cuenta la definición de raíz y lo dicho en el párrafo anterior, habrá de ser

$$\sqrt[n]{M_\Phi} = (\sqrt[n]{M})_{\frac{\Phi}{n}} \qquad \text{ya que} \qquad \left[(\sqrt[n]{M})_{\frac{\Phi}{n}}\right]^n = M_\Phi$$

Es decir, que *la raíz* n-*sima de un complejo tiene por módulo la raíz* n-*sima del módulo, y por argumento, el cociente del argumento por el índice* n *de la raíz.*

Ahora bien: como ya dijimos (núm. 152), la inclinación y sentido de un vector no varía cuando se añade a su argumento un número exacto de circunferencias o de giros, es decir, que el complejo M_Φ puede expresarse en su forma más general por

$$M_{\Phi + 2k\pi} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

(1) *Abraham* Demoivre (o Moivre), matemático francés (1667-1754), gran amigo de Newton.

Por tanto, la raíz n-sima de dicho número tendrá por módulo $\sqrt[n]{M}$, y por argumentos, los valores que se deducen de la fórmula

$$\frac{\Phi + 2k\pi}{n}$$

Pero, como vimos, solamente al hacer k sucesivamente igual a 0, 1, 2, 3, ..., $(n-1)$, la fórmula anterior adquiere valores distintos, obteniéndose los n argumentos siguientes:

$$\varphi_1 = \frac{\Phi}{n}; \quad \varphi_2 = \frac{\Phi}{n} + \frac{2\pi}{n}; \quad \varphi_3 = \frac{\Phi}{n} + 2 \times \frac{2\pi}{n}; \quad \ldots \; ; \quad \varphi_n = \frac{\Phi}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}$$

En consecuencia, son n las raíces n-simas del complejo de módulo M y argumento mínimo Φ, dadas, en forma módulo-argumental, por la expresión

$$(\sqrt[n]{M})_{\frac{\Phi + 2k\pi}{n}}$$

o bien, en forma trigonométrica, por

$$\sqrt[n]{M}\left(\cos\frac{\Phi + 2k\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{\Phi + 2k\pi}{n}\right)$$

al asignar en ambas a k los valores 0, 1, 2, 3, ... $(n-1)$.

Para la representación gráfica, véase la radicación de vectores (número 152, fig. 73).

CASOS PARTICULARES. — 1.º *Raíz cuadrada de un número real positivo.* — Sea el número $+n^2$.

Como todo número positivo tiene por argumento 0, el de la raíz cuadrada será

$$\frac{0}{2} \quad \text{y} \quad \frac{0 + 2\pi}{2} = \pi$$

Luego, las raíces cuadradas de $+n^2$ serán $n_0 = +n$ y $n_\pi = -n$, ambas reales, del mismo valor absoluto y signos contrarios

2.º *Raíz cuadrada de un número real negativo.* — Supongamos el número $-n^2$. Su argumento es π, y el de sus raíces cuadradas

$$\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \frac{\pi + 2\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

Luego. las raíces cuadradas de $-n^2$ son $n_{\frac{\pi}{2}} = ni$ y $n_{\frac{3\pi}{2}} = -ni$, ambas imaginarias y de signos contrarios.

EJEMPLO GENERAL. — Hallar todos los valores de $\sqrt[6]{-64}$.

Se tiene: $\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180°+k360°}} = (\sqrt[6]{64})_{\frac{180°+k360°}{6}} = 2_{30°+k60°}$

Bastará ahora, en el último resultado, dar a k los valores 0, 1, 2, 3, 4 y 5, para obtener, en la forma módulo-argumental, las seis raíces sextas de -64. Vamos a dar dichas raíces, además, en las otras tres formas: trigonométrica, binómica y cartesiana. Para el valor del seno y coseno de los ángulos que aparezcan, véase la tabla de *Funciones trigonométricas de algunos ángulos,* del final del libro.

$$R_1 = 2_{30°} = 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i = (\sqrt{3},\ 1)$$

$$R_2 = 2_{30°+1\times 60°} = 2(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°) = 2(0+i) = 0 + 2i = (0,\ 2)$$

$$R_3 = 2_{30°+2\times 60°} = 2(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -\sqrt{3} + i = (-\sqrt{3},\ 1)$$

$$R_4 = 2_{30°+3\times 60°} = 2(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°) = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -\sqrt{3} + i = (-\sqrt{3},\ -1)$$

$$R_5 = 2_{30°+4\times 60°} = 2(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°) = 2(0-i) = 0 - 2i = (0,\ -2)$$

$$R_6 = 2_{30°+5\times 60°} = 2(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i = (\sqrt{3},\ -1)$$

En la figura 82 se representan gráficamente estas raíces.

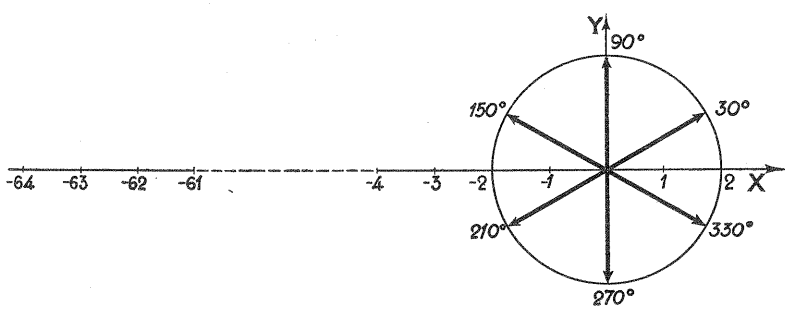


FIG. 82

171. Resolución y comprobación de ecuaciones de segundo grado cuyas raíces son complejas. — Hecho el estudio de los números complejos, nos es posible resolver y comprobar las ecuaciones de segundo grado cuyas raíces sean complejas.

EJEMPLO. — Resolver y comprobar la ecuación $x^2 + 3x + 9 = 0$.

Según la fórmula general de resolución, se tiene:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-36}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}\,i}{2}$$

$$x' = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \quad \text{y} \quad x'' = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

Recordemos que cuando una ecuación de segundo grado tiene raíces imaginarias, dichas raíces son dos *complejos conjugados.*

COMPROBACIÓN: Para $x = \dfrac{-3 + 3\sqrt{3}\,i}{2}$ resulta:

$$\left(\frac{-3 + 3\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{-3 + 3\sqrt{3}\,i}{2}\right) + 9 =$$

$$= \frac{9 - 18\sqrt{3}\,i - 27}{4} + \frac{-9 + 9\sqrt{3}\,i}{2} + 9 =$$

$$= 9 - 18\sqrt{3}\,i - 27 - 18 + 18\sqrt{3}\,i + 36 = 0; \qquad 0 = 0$$

Y para $x = \dfrac{-3 - 3\sqrt{3}\,i}{2}$, se obtiene

$$\left(\frac{-3 - 3\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{-3 - 3\sqrt{3}\,i}{2}\right) + 9 =$$

$$= \frac{9 + 18\sqrt{3}\,i - 27}{4} + \frac{-9 - 9\sqrt{3}\,i}{2} + 9 =$$

$$= 9 + 18\sqrt{3}\,i - 27 - 18 - 18\sqrt{3}\,i + 36 = 0; \qquad 0 = 0$$

EJERCICIOS

Efectuar las siguientes operaciones indicadas:

401. $(2, 5) + (-2, 1) + (-3, -1)$
$(5, 6) - (3, 4)$
$(2, 3) + (2, -3)$
$(2, -3) - (2, 3)$
$(7, -5) - (-2, 6)$

402. $(1-i) + (-2+i)$
$(4+3i) + (-2+3i)$
$(2-3i) - (4-2i)$
$(3+2i) + (4+3i) - (2+i)$
$(3-i) - (4-2i) + (4+3i)$

403. $(3+3i)(1+i)$
$(a-\sqrt{3}\,i)(a+\sqrt{3}\,i)$
$(2+\sqrt{7}\,i)(2-\sqrt{7}\,i)$
$(4+3\sqrt{6}\,i)(5+2\sqrt{6}\,i)$
$(5+\sqrt{-3})(4-2\sqrt{-3})$

404. $(a+3i)^2$
$(2x-i)(2x+i)$
$(5+3i)^2 - (5-3i)^2$
$(-1+\sqrt{-5})^2 - (-1-\sqrt{-5})^2$
$(x+yi)^3 - (x-yi)^3$

405. $\dfrac{5+i}{3-i}$ $\qquad$ $\dfrac{2+i}{7-3i}$ $\qquad$ $\dfrac{4}{1+i}$

Resolver las siguientes ecuaciones y comprobar los resultados:

406. $3x^2 + 8x + 10 = 0$
$4x^2 + 20x + 31 = 0$
$2x^2 - 12x + 21 = 0$

407. $7x^2 + 12x + 8 = 0$
$y^2 + 14y + 60 = 0$
$x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$

408. Resolver: $x^3 = -1$, $x^4 = 1$, $x^6 = 1$

***409.** Calcular todos los valores de $\sqrt[3]{x^3}$, $\sqrt[5]{x^5}$ y $\sqrt[6]{-x^6}$

Efectuar analítica y gráficamente las siguientes operaciones:

410. $(3, 2) \times (-\frac{1}{2}, 3)$

411. $(-2, 11) : (4, 3)$

412. $(\frac{3}{2}, 1)^4$

***413.** $\sqrt[4]{16}$

***414.** $\sqrt[5]{-32}$

***415.** $\sqrt[6]{-32+32\sqrt{3}\,i}$

Véanse más ejercicios sobre complejos al final del libro.

TRIGONOMETRÍA

23. Las funciones circulares

172. Trigonometría. Su objeto. — *Trigonometría* [1] *es la parte de las matemáticas que estudia las relaciones métricas entre los elementos de un triángulo.*

Como los triángulos pueden ser rectilíneos y esféricos, tendremos la *Trigonometría rectilínea* y la *Trigonometría esférica*, según estudie la resolución de triángulos rectilíneos o bien se proponga como objeto resolver las figuras trazadas sobre una esfera y compuestas por tres arcos de círculos máximos, llamadas triángulos esféricos.

Aquí estudiaremos únicamente la Trigonometría rectilínea.

Mediante el estudio y resolución de triángulos, la Trigonometría resuelve muchos problemas de ciencias aplicadas, como la Topografía, Navegación, Astronomía, etc.

Para lograr su objeto, considera la Trigonometría las *funciones circulares*, llamadas también *goniométricas* [2], o *trigonométricas*, que vamos a definir en seguida.

173. Los arcos en Trigonometría. — Para medir un arco, es necesario precisar: su *origen*, su *sentido* y la *unidad* elegida.

1.° ORIGEN: Supongamos una circunferencia (fig. 83) y tracemos dos diámetros perpendiculares que hagan de ejes cartesianos.

El punto A *en que la circunferencia corta a la parte positiva del eje de abscisas, será el punto que elegiremos siempre como origen de arcos.*

(1) Del griego, *trigónon* = triángulo y *métron* = medida.

(2) Del griego, *gonía* = ángulo.

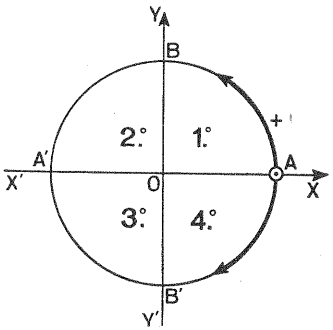


FIG. 83

2.° SENTIDO: Convenimos en considerar sentido *positivo* el contrario al del movimiento de las agujas del reloj, y *negativo* al que coincide con el de dicho movimiento.

3.° UNIDAD: En Trigonometría usaremos las mismas unidades empleadas en Geometría para medir arcos o ángulos: el *radián* y el *grado sexagesimal.*

Los ejes cartesianos determinan en la circunferencia cuatro cuadrantes, que se denominan como sigue: AB, primer cuadrante; BA', segundo cuadrante; $A'B'$, tercer cuadrante; $B'A$, cuarto cuadrante.

174. Divisiones de la circunferencia. — Recordemos los sistemas de unidades más usuales en Geometría para medir arcos y ángulos.

a) *División sexagesimal de la circunferencia.* — La circunferencia se divide en 360 partes iguales llamadas grados. Cada grado se divide en 60 minutos, y cada minuto en 60 segundos. Los grados, minutos y segundos sexagesimales se representan, respectivamente, por los signos (°), (′) y (″), colocados en la parte superior derecha de los números que expresan la medida del ángulo.

A 90° corresponde un cuadrante, o cuarta parte de la circunferencia.

b) *División centesimal.* — En esta división se supone dividida la circunferencia en 400 partes iguales llamadas grados, los grados en 100 minutos, y los minutos en 100 segundos. Los grados, minutos y segundos centesimales se representan, respectivamente, por las letras (^{g}), (^{m}) y (^{s}), escritas en la parte superior derecha del número, a modo de exponentes.

El cuadrante, en esta división, tiene 100 grados.

c) *División en radianes.* — Radián es el arco de longitud igual al radio con que está trazado.

Siendo la longitud de la circunferencia igual a $2\pi r$, su medida en radianes será 2π; la de un cuadrante, $\frac{\pi}{2}$; la de una semicircunferencia, π, y la de tres cuadrantes, $\frac{3\pi}{2}$.

175. Correspondencia entre grados sexagesimales y radianes. — Estos son los dos problemas que se pueden presentar:

1.° *Dado un arco de* n *grados sexagesimales, expresarlo en radianes.*

De la proporción

$$\frac{180}{\pi} = \frac{n}{x} \quad \text{se deduce:} \quad x = \frac{n\,\pi}{180} \text{ radianes.}$$

2.° *Dado un arco de* n *radianes, expresarlo en grados, minutos y segundos sexagesimales.*

Tendremos:

$$\frac{\pi}{180} = \frac{n}{x}; \quad \text{de donde:} \quad x = \frac{180\,n}{\pi} \text{ grados.}$$

En particular, 1 radián = 57° 17′ 44″,8.

Véanse en el siguiente cuadro algunas equivalencias entre grados sexagesimales y radianes, en una circunferencia completa:

GRADOS	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
RADIANES	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\,\pi}{3}$	$\frac{5\,\pi}{6}$	π	$\frac{7\,\pi}{6}$	$\frac{4\,\pi}{3}$	$\frac{3\,\pi}{2}$	$\frac{5\,\pi}{3}$	$\frac{11\,\pi}{6}$	$2\,\pi$

176. Funciones goniométricas de un ángulo, o de un arco. — Supongamos un ángulo α (fig. 84), y hagamos coincidir su vértice con el origen O de un sistema de ejes cartesianos y su primer lado o *lado origen* con la parte positiva del eje de abscisas.

Tracemos luego varios arcos AM, $A'M'$, $A''M''$, ... y por sus extremos M, M', M'', ... tracemos al eje OX sendas perpendiculares. Se habrán formado los triángulos OPM, $OP'M'$, $OP''M''$, que son semejantes en virtud del teorema de Thales, por lo que podremos escribir las siguientes proporciones:

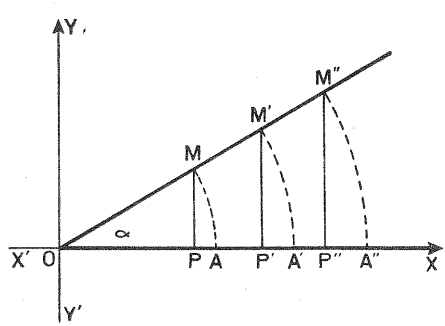


FIG. 84

$$\frac{PM}{OM} = \frac{P'M'}{OM'} = \frac{P''M''}{OM''} = \ldots = k_1 = \textit{seno del ángulo } \alpha$$

$$\frac{OP}{OM} = \frac{OP'}{OM'} = \frac{OP''}{OM''} = \ldots = k_2 = \textit{coseno del ángulo } \alpha$$

$$\frac{PM}{OP} = \frac{P'M'}{OP'} = \frac{P''M''}{OP''} = \ldots = k_3 = \textit{tangente del ángulo } \alpha$$

$$\frac{OP}{PM} = \frac{OP'}{P'M'} = \frac{OP''}{P''M''} = \ldots = k_4 = \frac{1}{k_3} = \textit{cotangente del ángulo } \alpha$$

$$\frac{OM}{OP} = \frac{OM'}{OP'} = \frac{OM''}{OP''} = \ldots = k_5 = \frac{1}{k_2} = \textit{secante del ángulo } \alpha$$

$$\frac{OM}{PM} = \frac{OM'}{P'M'} = \frac{OM''}{P''M''} = \ldots = k_6 = \frac{1}{k_1} = \textit{cosecante del ángulo } \alpha$$

DEFINICIONES:

SENO *de un ángulo o arco* α, *es la razón de la ordenada del extremo del arco a su radio.* Se escribe, abreviadamente, *sen* α. Es decir:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{ordenada}}{\text{radio}} = \frac{y}{r}$$

COSENO *de un ángulo o arco* α, *es la razón de la abscisa del extremo del arco a su radio.* Se escribe, abreviadamente, *cos* α. Es decir:

$$\cos \alpha = \frac{\text{abscisa}}{\text{radio}} = \frac{x}{r}$$

TANGENTE *de un ángulo o arco* α, *es la razón de la ordenada a la abscisa del extremo del arco.* Se escribe, abreviadamente, *tg* α. Es decir:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \frac{y}{x}$$

COTANGENTE *de un ángulo o arco* α, *es la razón de la abscisa a la ordenada del extremo del arco.* Se escribe, abreviadamente, *cotg* α. Es decir:

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \frac{x}{y}$$

SECANTE *de un ángulo o arco* α, *es la razón del radio a la abscisa del extremo del arco.* Se escribe, abreviadamente, *sec* α. Es decir:

$$\sec \alpha = \frac{\text{radio}}{\text{abscisa}} = \frac{r}{x}$$

COSECANTE *de un ángulo o arco* α, *es la razón del radio a la ordenada del extremo del arco.* Se escribe, abreviadamente, *cosec* α. Es decir:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{radio}}{\text{ordenada}} = \frac{r}{y}$$

Estas relaciones se denominan *razones goniométricas,* porque determinan el ángulo, o también *razones trigonométricas.*

177. Signo de las razones trigonométricas. — Advirtiendo que el radio se toma en valor absoluto, es decir, se considera siempre positivo, y teniendo en cuenta el signo de la abscisa y ordenada en los diferentes cuadrantes, es fácil deducir el signo de las razones trigonométricas, cuando se sabe la medida del ángulo, o en qué cuadrante termina. Bastará aplicar la regla de los signos de la división a las definiciones anteriores. Hay que advertir también que la cotangente, secante y cosecante, por ser inversas, respectivamente, de la tangente, coseno y seno, tendrán igual signo que éstas. Según esto, designando por x e y al valor absoluto de las coordenadas, y por m, n y p, respectivamente, el de las razones seno, coseno y tangente, tendremos (fig. 85): Si el ángulo termina

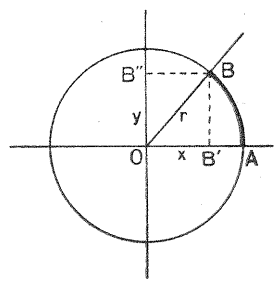


FIG. 85

a) EN EL PRIMER CUADRANTE:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{+y}{r} = +m; \qquad \cos \alpha = \frac{+x}{r} = +n; \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{+y}{+x} = +p$$

Luego, *todas las razones son positivas.*

b) EN EL SEGUNDO CUADRANTE:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{+y}{r} = +m; \qquad \cos \alpha = \frac{-x}{r} = -n; \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{+y}{-x} = -p$$

Luego, *el seno y su inversa la cosecante son positivas; las demás son negativas.*

c) EN EL TERCER CUADRANTE:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{-y}{r} = -m; \qquad \cos \alpha = \frac{-x}{r} = -n; \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{-y}{-x} = +p$$

Luego, *la tangente y su inversa la cotangente son positivas; las demás son negativas.*

d) EN EL CUARTO CUADRANTE:

$$\text{sen } \alpha = \frac{-y}{r} = -m; \qquad \cos \alpha = \frac{+x}{r} = +n; \qquad \text{tg } \alpha = \frac{-y}{+x} = -p$$

Luego, *el coseno y su inversa la secante son positivas; las demás son negativas.*

178. Representación geométrica del seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS. — Sea el ángulo $\alpha = AOB$ (figura 86) y supongamos $r = OA = OB = 1$.

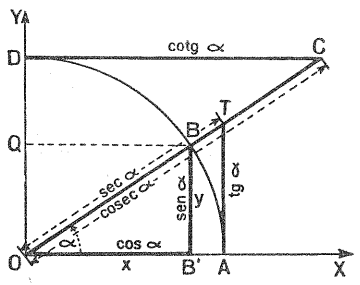


FIG. 86

Admitido esto, tendremos las siguientes definiciones:

SENO *de un ángulo es la ordenada del extremo de su arco.*

En efecto:

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{r} = \frac{BB'}{OB} = \frac{BB'}{1} = BB'$$

COSENO *de un ángulo es la abscisa del extremo de su arco.*

En efecto:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OB'}{1} = OB'$$

TANGENTE *es el segmento de la tangente geométrica trazada por el origen del arco, y comprendido entre ese punto y la intersección con la prolongación del radio que pasa por el extremo.*

En efecto: por ser semejantes los triángulos $OB'B$ y OAT, podemos escribir:

$$\text{tg } \alpha = \frac{y}{x} = \frac{B'B}{OB'} = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$$

COTANGENTE *es el segmento de tangente geométrica trazada por el extremo del primer cuadrante, y comprendido entre este punto y la intersección con la prolongación del radio que pasa por el extremo del arco.*

En efecto: de la semejanza de los triángulos $OB'B$ y CDO, se deduce:

$$\text{cotg } \alpha = \frac{x}{y} = \frac{OB'}{BB'} = \frac{BQ}{OQ} = \frac{CD}{OD} = \frac{DC}{1} = DC$$

SECANTE *de un ángulo es el segmento comprendido entre el centro del arco y el extremo de la tangente.*

En efecto: de la semejanza de los triángulos $OB'B$ y OAT, se deduce:

$$\text{sec } \alpha = \frac{r}{x} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OT}{OA} = \frac{OT}{1} = OT$$

COSECANTE *de un ángulo es el segmento comprendido entre el centro del arco y el extremo de la cotangente.*

En efecto: de la semejanza de los triángulos $OB'B$ y ODC, se deduce:

$$\text{cosec } \alpha = \frac{r}{y} = \frac{OB}{BB'} = \frac{OB}{OQ} = \frac{OC}{OD} = \frac{OC}{1} = OC$$

Los segmentos BB', OB', AT, DC, OT y OC se llaman *líneas trigonométricas* del ángulo α, o del arco AB.

Esta representación geométrica hace que se retengan de una manera intuitiva e inmediata muchas de las propiedades de las razones trigonotricas.

Para deducir rápidamente el signo de las líneas trigonométricas, tendremos en cuenta las siguientes reglas prácticas:

sen y tg { signo *positivo* si están encima de XX' / signo *negativo* si están debajo de XX'

cos y cotg { *positivas* si están a derecha de YY' / *negativas* si están a izquierda de YY'

sec y cosec { *positivas* si pasan por el extremo del arco / *negativas* si no pasan por el extremo del arco

En las figuras 86, 87 y 88 se han representado las líneas trigonométricas de un ángulo α que termina en el primero, segundo y tercer cuadrante, respectivamente. Es muy conveniente que el alumno se ejercite en este trazado.

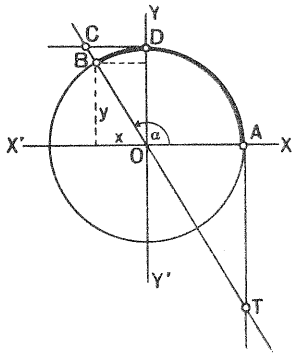


FIG 87

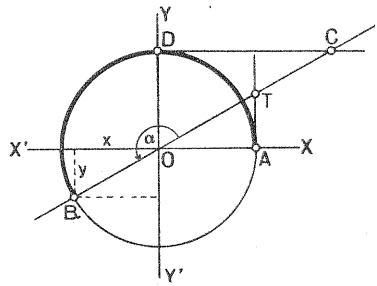


FIG. 88

179. Variación y valores extremos de las razones trigonométricas. — Según la definición de las distintas razones trigonométricas (núm. 176), dichas razones serán iguales para todos los ángulos que tengan el mismo origen y el mismo extremo, es decir, para los comprendidos en la fórmula

$$2k\pi + \alpha \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

uno de cuyos ángulos es α, cuando $k = 0$.

Luego, podremos escribir:

$$\operatorname{sen}(2k\pi+\alpha) = \operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{cotg}(2k\pi+\alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$$

$$\cos(2k\pi+\alpha) = \cos\alpha \qquad \sec(2k\pi+\alpha) = \sec\alpha$$

$$\operatorname{tg}(2k\pi+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{cosec}(2k\pi+\alpha) = \operatorname{cosec}\alpha$$

Según esto, bastará estudiar la variación que experimenta cada una de las razones trigonométricas cuando α crece desde 0 a 2π.

Supongamos, para ello (fig. 85), que el lado extremo, *OB*, del ángulo α, coincide primero con *OA*, y que luego va girando en sentido positivo hasta recorrer *B* toda la circunferencia. Al hallar el valor de las razones trigonométricas observaríamos las variaciones que se expresan en el siguiente cuadro:

arco α	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\longrightarrow$	π	$\longrightarrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\longrightarrow$	2π	Período
$\text{sen } \alpha = \frac{y}{r}$	0	crece	1	decrece	0	decr.	-1	crece	0	2π ó $360°$
$\cos \alpha = \frac{x}{r}$	1	decrece	0	decrece	-1	crece	0	crece	1	2π ó $360°$
$\text{tg } \alpha = \frac{y}{x}$	0	crece	$\pm\infty$	crece	0	crece	$\pm\infty$	crece	0	π ó $180°$
$\text{cot } \alpha = \frac{x}{y}$	$\mp\infty$	decrece	0	decrece	$\mp\infty$	decr.	0	decr.	$\mp\infty$	π ó $180°$
$\text{sec } \alpha = \frac{r}{x}$	1	crece	$\pm\infty$	crece	-1	decr.	$\mp\infty$	decr.	1	2π ó $360°$
$\text{csc } \alpha = \frac{r}{y}$	$\mp\infty$	decrece	1	crece	$\pm\infty$	crece	-1	decr.	$\mp\infty$	2π ó $360°$

En resumen, podemos sacar las siguientes consecuencias:

1.ª *El valor máximo del seno y el coseno es* $+1$, *y el valor mínimo,* -1.

2.ª *La tangente y la cotangente pueden tomar cualquier valor real, positivo o negativo.*

3.ª *El valor absoluto de la secante y cosecante varía entre* 1 *e* ∞; *nunca puede ser inferior a la unidad.*

4.ª *La tangente siempre crece, y pasa bruscamente de* $+\infty$ *a* $-\infty$ *en los arcos* $\frac{\pi}{2}$ *y* $\frac{3\pi}{2}$.

5.ª *La cotangente siempre decrece, y pasa bruscamente de* $-\infty$ *a* $+\infty$ *en los arcos* 0 *y* π.

EJERCICIOS

416. Expresar en radianes los siguientes ángulos: 360°, 180°, 90°, 45°, 60°, 30°, 15°, 120°, 135°, 225°, 270°, 315°, 3 × 360°, 75°.

417. Calcular el valor de un radián expresado en grados, minutos y segundos.

418. Expresar en grados, minutos y segundos los siguientes ángulos:

$\alpha_1 = 4\pi/3$ radianes $\qquad$ $\alpha_3 = \pi/4$ radián

$\alpha_2 = 0'04$ radián $\qquad$ $\alpha_4 = 5\pi$ radianes.

419. Calcular la longitud de un arco de 5 metros de radio, perteneciente a un ángulo de 2 radianes.

420. Calcular la longitud del arco descrito por un móvil, distante 10 cm. del eje, en 20 segundos, si el eje gira a razón de 1.200 vueltas por minuto. Expresar también el valor del ángulo descrito por el móvil, en grados y radianes.

421. Hallar el complemento de los arcos siguientes:

$\alpha_1 = 15° \ 28' \ 30''$ $\qquad$ $\alpha_4 = 10° \ 11' \ 16'',5$

$\alpha_2 = 64° \ 17' \ 12''$ $\qquad$ $\alpha_5 = 119° \ 16' \ 6'',2$

$\alpha_3 = -57° \ 18'$ $\qquad$ $\alpha_6 = -7° \ 52' \ 13''$

422. Hallar el suplemento de los arcos siguientes:

$\beta_1 = 12° \ 54' \ 25''$ $\qquad$ $\beta_3 = -15° \ 37' \ 21''$

$\beta_2 = 124° \ 39' \ 12''$ $\qquad$ $\beta_4 = 194° \ 32' \ 5'',5$

423. Calcular el seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante de cada uno de los ángulos indicados en la figura 89. El sentido positivo de los ejes está indicado por la dirección de la flecha.

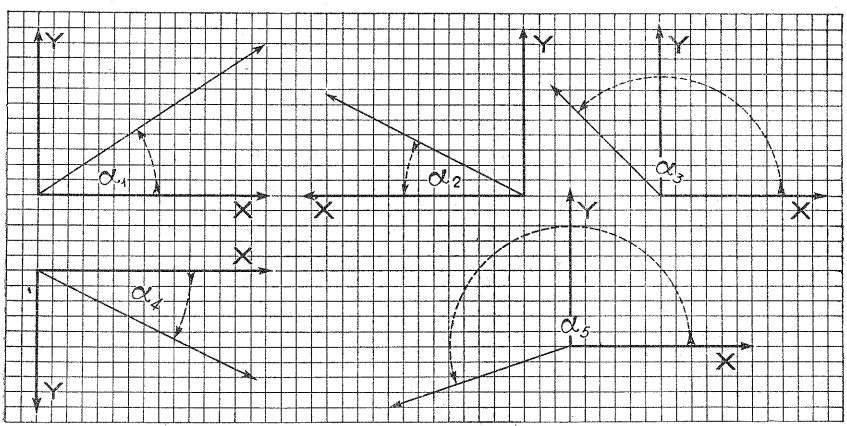


FIG. 89

424. Dibujar un ángulo que termine en cada uno de los cuatro cuadrantes y comprobar el signo que corresponde a sus razones trigonométricas.

425. Determinar el signo de las razones trigonométricas de los ángulos 2.260°, 1.088°, 3.449°, $-230°$ y $-2.260°$.

426. Cuando queramos expresar en fórmula condensada los infinitos ángulos, o arcos, cuyo seno vale 1, usaremos la fórmula $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$. Representar de igual modo: 1.°, todos los ángulos cuyo seno es cero; 2.°, todos los ángulos cuyo seno es igual a -1; 3.°, todos los ángulos cuya tangente es igual a cero; 4.°, todos los ángulos de secante igual a -1, y 5.°, todos los ángulos de cosecante igual a 1.

24. Relaciones entre las funciones trigonométricas de ciertos ángulos

180. Razones trigonométricas de ángulos que difieren en un múltiplo de 360°. — Los arcos correspondientes a estos ángulos tienen el mismo origen y el mismo extremo (figura 90), y, por consiguiente, se verifica que

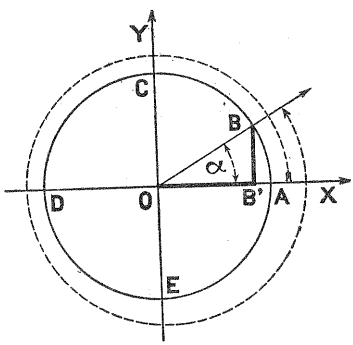


FIG. 90

$$\text{sen } (n\ 360° + \alpha) = \text{sen } \alpha$$
$$\cos (n\ 360° + \alpha) = \cos \alpha$$
$$\text{tg } (n\ 360° + \alpha) = \text{tg } \alpha$$
$$\text{cotg } (n\ 360° + \alpha) = \text{cotg } \alpha$$
$$\sec (n\ 360° + \alpha) = \sec \alpha$$
$$\text{cosec } (n\ 360° + \alpha) = \text{cosec } \alpha$$

Esto significa que al añadir, o restar, a un ángulo, otro cuya medida sea un múltiplo de 360°, resulta un ángulo que tiene iguales razones trigonométricas que el primero.

181. Razones trigonométricas de ángulos complementarios. — Si uno de los ángulos vale α, su complementario será $90° - \alpha$.

Observemos que dichos ángulos, o son los dos positivos y menores que 90° (*M'OM* y *M'ON*, fig. 91), o uno es positivo, mayor que 90°, y otro negativo (*N'OM* y *N'ON*, fig. 92).

Si doblamos ambas figuras por la bisectriz *BB'* del primero y tercer cuadrantes, veremos que los triángulos *MOM'* y *NON'* coinciden. Por tanto,

$$x = y' \qquad \text{e} \qquad y = x'$$

es decir, que, en los ángulos complementarios, la abscisa [1] de uno es igual a la ordenada del otro, y la ordenada del primero es igual a la abscisa del segundo.

(1) Cuando decimos la abscisa, o la ordenada, de un ángulo, se sobrentiende que nos referimos a la abscisa, o a la ordenada, del extremo del arco correspondiente a dicho ángulo.

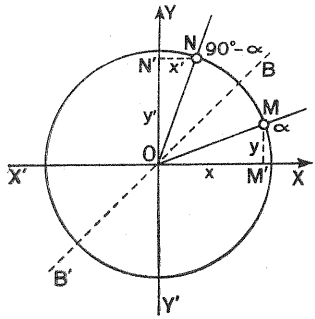


FIG. 91

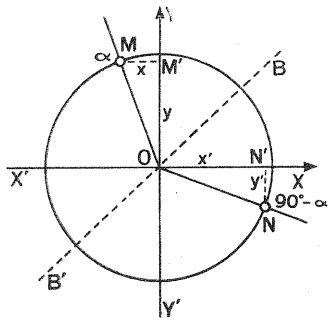


FIG. 92

Luego, según las definiciones de razones trigonométricas (núm. 176), resulta:

$$\text{sen}\ (90°-\alpha) = \cos\alpha \qquad \text{cotg}\ (90°-\alpha) = \text{tg}\ \alpha$$
$$\cos\ (90°-\alpha) = \text{sen}\ \alpha \qquad \sec\ (90°-\alpha) = \text{cosec}\ \alpha$$
$$\text{tg}\ (90°-\alpha) = \text{cotg}\ \alpha \qquad \text{cosec}\ (90°-\alpha) = \sec\alpha$$

O sea: *El seno, la tangente y la secante de un ángulo son iguales, respectivamente, al coseno, cotangente y cosecante de su complementario.*

182. Razones trigonométricas de ángulos suplementarios. — Si uno de ellos es α, el suplementario será $180° - \alpha$.

Observemos que, o son los dos positivos y menores que 180° (*M'OM* y *M'ON*, fig. 93), o uno es positivo, mayor que 180°, y otro negativo (*N'OM* y *N'ON*, fig. 94).

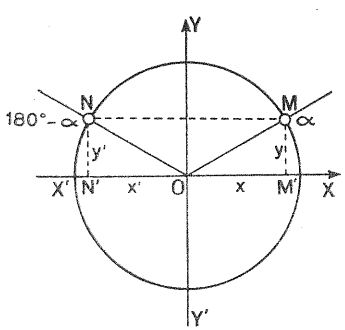


FIG. 93

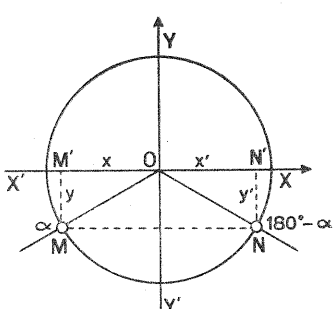


FIG 94

Los triángulos $MM'O$ y $NN'O$, en ambas figuras, son iguales, como se podría comprobar, doblándolas por el eje YY'; veríamos que todos sus lados coinciden. En consecuencia,

$$x = -x' \quad \text{e} \quad y = y'$$

es decir, que, en los ángulos suplementarios, las abscisas son iguales, pero de signo contrario, y las ordenadas son iguales en valor absoluto y signo.

Luego, según las definiciones de razones trigonométricas (núm. 176), resulta:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(180°-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{cotg}(180°-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha \\ \cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha & \sec(180°-\alpha) = -\sec\alpha \\ \operatorname{tg}(180°-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha & \operatorname{cosec}(180°-\alpha) = \operatorname{cosec}\alpha \end{array}$$

O sea: *Los ángulos suplementarios tienen igual el seno y la cosecante (por depender sólo de la ordenada); cada una de las demás razones tiene en los dos ángulos el mismo valor absoluto, pero distinto signo.*

183. Razones de ángulos opuestos. — Si uno de ellos es α, el otro será $-\alpha$ (fig. 95).

De la igualdad de los triángulos AOM y AON, se deduce que

$$x = x' \quad \text{e} \quad y = -y'$$

es decir: en los ángulos opuestos, las abscisas son iguales en valor absoluto y signo, y las ordenadas son de igual valor absoluto, pero de signo contrario.

Luego, según las definiciones de razones trigonométricas (núm. 176), resulta:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha & \operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha & \sec(-\alpha) = \sec\alpha \\ \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha & \operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha \end{array}$$

O sea: *Los ángulos opuestos tienen igual el coseno y la secante (por depender sólo de la abscisa); cada una de las demás razones tiene en los dos ángulos el mismo valor absoluto y distinto signo.*

184. Razones de ángulos que se diferencian en 90°. — Si uno de ellos es α, el otro será $90° + \alpha$ (fig. 96).

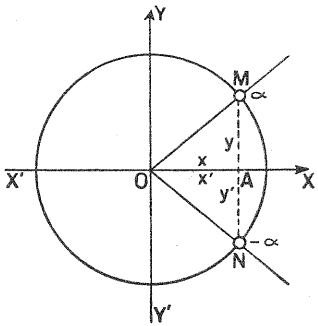


FIG. 95

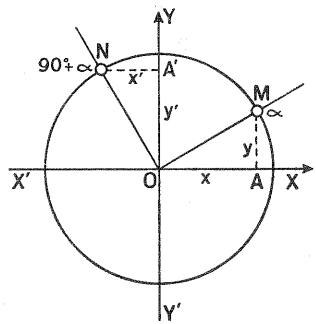


FIG. 96

Los triángulos MAO y $NA'O$ son iguales, por ser triángulos rectángulos que tienen iguales la hipotenusa y un ángulo agudo. Por consiguiente,

$$x = y' \qquad \text{e} \qquad y = -x'$$

es decir: en dos ángulos que difieren en 90°, la abscisa de uno es igual a la ordenada del otro, mientras que la ordenada del primero es igual a menos la abscisa del segundo.

Luego, según las definiciones de razones trigonométricas (núm. 176), resulta:

$$\begin{array}{ll} \text{sen } (90° + \alpha) = \cos \alpha & \text{cotg } (90° + \alpha) = -\text{ tg } \alpha \\ \cos (90° + \alpha) = -\text{ sen } \alpha & \sec (90° + \alpha) = -\text{ cosec } \alpha \\ \text{tg } (90° + \alpha) = -\text{ cotg } \alpha & \text{cosec } (90° + \alpha) = \sec \alpha \end{array}$$

O sea: *El coseno y la secante del primer ángulo son iguales, respectivamente, al seno y cosecante del segundo, en tanto que el seno, tangente, cotangente y cosecante de* α *son iguales, respectivamente, a menos el coseno, menos la cotangente, menos la tangente y menos la secante de* $90° + \alpha$.

185. Razones de ángulos que se diferencian en 180°. — Si uno de ellos es α, el otro será $180° + \alpha$ (fig. 97).

De la igualdad de los triángulos AOM y $A'ON$, se deduce que

$$x = -x' \qquad \text{e} \qquad y = -y'$$

Luego, aplicando las definiciones de razones trigonométricas (núm. 176), resulta:

$$\text{sen } (180° + \alpha) = -\text{ sen } \alpha$$
$$\cos (180° + \alpha) = -\cos \alpha$$
$$\text{tg } (180° + \alpha) = \text{tg } \alpha$$
$$\text{cotg } (180° + \alpha) = \text{cotg } \alpha$$
$$\sec (180° + \alpha) = -\sec \alpha$$
$$\text{cosec } (180° + \alpha) = -\text{ cosec } \alpha$$

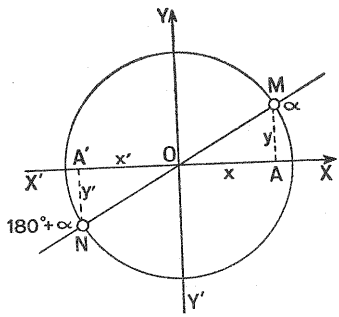


FIG. 97

O sea: *Dos ángulos que difieren en* 180°, *tienen igual la tangente y la cotangente (por depender ambas de la abscisa y ordenada); cada una de las demás razones tiene en los dos ángulos el mismo valor absoluto y distinto signo.*

186. Reducción de las razones goniométricas a las del primer cuadrante. — En las tablas empleadas en los cálculos trigonométricos, aparecen solamente las razones correspondientes a los ángulos menores que un recto, o bien sus logaritmos. Interesa, por tanto, saber reducir las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera a las de otro que esté comprendido en el primer cuadrante.

Ante todo, si el ángulo es, en valor absoluto, mayor que 360°, sabemos que restando, o sumando, un número entero de circunferencias, resulta otro, que llamaremos α, menor que cuatro rectos, cuyas razones trigonométricas son iguales a las del primero (núm. 180). En el caso de que este ángulo α fuera menor que 90°, estaría ya resuelto el problema que nos ocupa.

Cuando α sea un *ángulo del segundo cuadrante,* hallaremos en las tablas las razones de su suplemento y luego les pondremos el signo debido (núm. 182).

Cuando α sea un *ángulo del tercer cuadrante,* le restaremos 180° y buscaremos en las tablas las razones del ángulo diferencia, a las que afectaremos del signo que sea conveniente (núm. 185).

Finalmente, si α es un *ángulo del cuarto cuadrante,* le restaremos 360°, con lo cual obtendremos un ángulo negativo de valor absoluto menor que 90° y con las mismas razones trigonométricas que α. Bastará, por

tanto, hallar las razones de este ángulo negativo, que serán iguales en magnitud a las de su opuesto $(360° - \alpha)$, pero afectadas del signo debido (número 183).

En las figuras 98, 99 y 100 se esquematiza la solución de los tres problemas precedentes, y en el cuadro que aparece a continuación se indican las fórmulas que han de aplicarse en el cálculo.

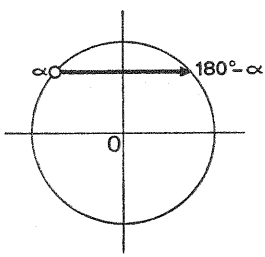


FIG. 98

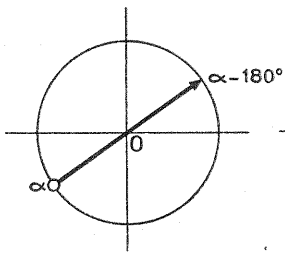


FIG. 99

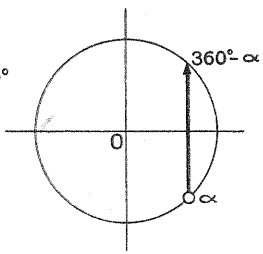


FIG. 100

α EN EL 2.º CUADRANTE $90° < \alpha < 180°$	α EN EL 3.er CUADRANTE $180° < \alpha < 270°$	α EN EL 4.º CUADRANTE $270° < \alpha < 360°$
sen α = sen $(180° - \alpha)$	sen α = $-$sen $(\alpha - 180°)$	sen α = $-$sen $(360° - \alpha)$
cos α = $-$cos $(180° - \alpha)$	cos α = $-$cos $(\alpha - 180°)$	cos α = cos $(360° - \alpha)$
tg α = $-$tg $(180° - \alpha)$	tg α = tg $(\alpha - 180°)$	tg α = $-$tg $(360° - \alpha)$
cotg α = $-$cotg $(180° - \alpha)$	cotg α = cotg $(\alpha - 180°)$	cotg α = $-$cotg $(360° - \alpha)$
sec α = $-$sec $(180° - \alpha)$	sec α = $-$sec $(\alpha - 180°)$	sec α = sec $(360° - \alpha)$
cosec α = cosec $(180° - \alpha)$	cosec α = $-$cosec $(\alpha - 180°)$	cosec α = $-$cosec $(360° - \alpha)$

EJERCICIO. — Valiéndose de las TABLAS TRIGONOMÉTRICAS NATURALES, determinar los valores de:

cos 1240°; tg 318°; cos 155°; sec 210°; cosec $(-125°)$; cotg $(-500°)$

187. Ángulos correspondientes a una razón trigonométrica dada. — Dado un ángulo, le corresponde solamente un valor para cada una de sus razones trigonométricas. Ahora bien: no ocurre así a la inversa, es decir, que, conocido el valor de una razón trigonométrica, hay una infinidad de ángulos a los cuales corresponde dicho valor para la misma razón.

Estos ángulos están relacionados por fórmulas cuya deducción se logra con facilidad.

I. ÁNGULOS QUE TIENEN EL MISMO SENO. — Se trata de hallar los ángulos α que verifican la ecuación

$$\text{sen } \alpha = m \quad \text{en la que} \quad -1 \leqslant m \leqslant 1$$

Según la definición de seno,

$$m = \frac{y}{r}, \quad \text{de donde} \quad y = mr$$

lo cual significa que si en una circunferencia de radio r (figs. 93 y 94), trazamos una paralela al eje XX', a la distancia $MM' = mr$ (en la parte superior o inferior, según sea m positivo o negativo), dicha paralela cortará a la circunferencia en dos puntos M y N, por los cuales pasará el lado extremo de los ángulos cuyo seno es m.

Luego, dos soluciones del problema, serán los ángulos

$$\alpha \quad \text{y} \quad \pi - \alpha$$

y todas las posibles,

$$2k\pi + \alpha \quad \text{y} \quad 2k\pi + \pi - \alpha = (2k+1)\pi - \alpha$$

II. ÁNGULOS QUE TIENEN EL MISMO COSENO. — Se trata de hallar los ángulos α que satisfacen la ecuación

$$\cos \alpha = m, \quad \text{en la que} \quad -1 \leqslant m \leqslant 1$$

Según la definición de coseno,

$$m = \frac{x}{r}, \quad \text{de donde} \quad x = mr$$

Quiere esto decir que, si en una circunferencia de radio r (fig. 95), trazamos una paralela al eje YY', a la distancia $OA = mr$ (a la derecha o a la izquierda, según sea m positivo o negativo), dicha paralela cortará a la circunferencia en dos puntos M y N, por los cuales pasará el lado extremo de los ángulos cuyo coseno es m.

Luego, dos soluciones del problema, serán los ángulos

$$\alpha \quad \text{y} \quad -\alpha$$

y todas las posibles,

$$2k\pi + \alpha \quad \text{y} \quad 2k\pi - \alpha, \quad \text{o bien,} \quad 2k\pi \pm \alpha$$

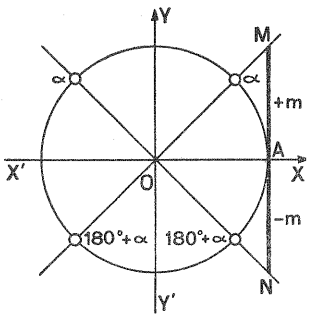


FIG. 101

III. ÁNGULOS QUE TIENEN LA MISMA TANGENTE. — Se trata de hallar los ángulos α que verifican la ecuación

$$\text{tg } \alpha = m \quad \text{en la que} \quad \infty > m > -\infty$$

Supongamos una circunferencia de radio igual a la unidad (fig. 101). Tracemos en el origen de arcos, A, una perpendicular al eje XX' de longitud igual a m, en la parte superior si m es positivo, o en la parte inferior si es negativo. El diámetro que pase por el extremo M, o N, cortará a la circunferencia en dos puntos que serán los extremos de los infinitos ángulos cuya tangente es m. Si llamamos α al menor de los positivos, tendremos que dos de las soluciones del problema serán los ángulos

$$\alpha \quad \text{y} \quad \pi + \alpha$$

y todas las posibles,

$$k\pi + \alpha$$

ya que los valores de la tangente se repiten cada π radianes, o cada 180°.

IV. ÁNGULOS QUE TIENEN LA MISMA COTANGENTE, LA MISMA SECANTE O LA MISMA COSECANTE. — Como estas razones son las recíprocas, respectivamente, de la tangente, del coseno y del seno, para determinar los ángulos de

$$\left.\begin{array}{l}\text{cotangente} = m\\ \text{secante} \quad = m\\ \text{cosecante} \; = m\end{array}\right\} \text{ se hallan los ángulos de } \left\{\begin{array}{l}\text{tangente} = \frac{1}{m}\\ \text{coseno} \quad = \frac{1}{m}\\ \text{seno} \quad\quad = \frac{1}{m}\end{array}\right.$$

con lo que obtendremos las mismas fórmulas generales antes halladas, si bien el valor de α será distinto en este caso.

Resumen. — 1.° *La fórmula general de los ángulos que tienen igual seno o igual cosecante es*

$$\text{(radianes)} \left\{\begin{array}{l} 2k\pi + \alpha \\ 2k\pi + \pi - \alpha = (2k+1)\pi - \alpha\end{array}\right.$$

$$\text{(grados)} \left\{\begin{array}{l} n\,360° + \alpha \\ n\,360° + 180° - \alpha = (2n+1)\,180° - \alpha\end{array}\right.$$

2.° *La fórmula general de los ángulos que tienen igual coseno o igual secante es*

$$\text{(radianes)} \begin{cases} 2k\pi + \alpha \\ 2k\pi - \alpha \end{cases} \Bigg\} \; 2k\pi \pm \alpha$$

$$\text{(grados)} \begin{cases} n\,360^\circ + \alpha \\ n\,360^\circ - \alpha \end{cases} \Bigg\} \; n\,360^\circ \pm \alpha$$

3.° *La fórmula general de los ángulos que tienen igual tangente o igual cotangente es*

$$\text{(radianes)} \; \{ \; k\pi + \alpha$$

$$\text{(grados)} \; \{ \; n\,180^\circ + \alpha$$

En todas estas fórmulas, α es el menor ángulo positivo que resuelve el problema, para un valor dado, positivo o negativo, de la función respectiva.

188. Relaciones entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo.

I. RELACIONES INMEDIATAS. — Por definición sabemos que el valor de la *cosecante* es inverso o recíproco del correspondiente al *seno;* lo mismo sucede con la *secante* respecto del *coseno* y con la *cotangente* respecto de la *tangente.*

Se tiene, en efecto:

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = \frac{y}{r} \cdot \frac{r}{y} = 1$$

de donde,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad [1]$$

Análogamente:

$$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = \frac{x}{r} \cdot \frac{r}{x} = 1$$

luego,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} \qquad \text{y} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad [2]$$

Del mismo modo:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = 1$$

luego,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \qquad [3]$$

Por otra parte, vemos que, por ser:

$$\frac{y}{r} : \frac{x}{r} = \frac{y}{x} \quad \text{se deduce que} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad [4]$$

$$\frac{x}{r} : \frac{y}{r} = \frac{x}{y} \quad \text{se deduce que} \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad [5]$$

II. RELACIONES PITAGÓRICAS. — Si aplicamos el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos que se forman al trazar las líneas trigonométricas de un ángulo, resulta:

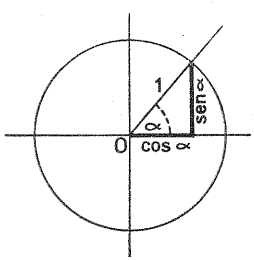


FIG. 102

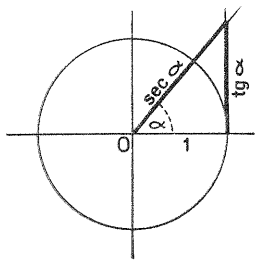


FIG. 103

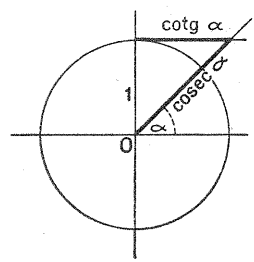


FIG. 104

Figura 102:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad [6]$$

Figura 103:

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \quad \text{o bien} \quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad [7]$$

teniendo en cuenta la relación [2]

Figura 104:

$$1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha \quad \text{o bien} \quad 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \qquad [8]$$

teniendo en cuenta la relación [1]

OBSERVACIÓN. — Las dos últimas relaciones hubieran podido obtenerse también de este modo:

Dividamos la igualdad $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ por $\cos^2\alpha$:

$$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \text{o sea,} \quad \text{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$$

Dividamos la igualdad $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ por $\text{sen}^2\alpha$:

$$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha}, \quad \text{o sea,} \quad 1 + \text{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} = \text{cosec}^2\alpha$$

189. Cálculo de las razones trigonométricas de un ángulo en función de una dada. — Las tres importantes fórmulas siguientes:

$$1)\ \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad 2)\ \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \qquad 3)\ \text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$$

constituyen las llamadas *relaciones fundamentales de la trigonometría.* Ellas nos permiten calcular las razones trigonométricas de un ángulo en función de una dada.

I. CONOCIENDO EL SENO. — Sea $\text{sen}\,\alpha = m$.

El *coseno* lo deducimos despejándolo de la fórmula 1):

$$\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha; \qquad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = \pm\sqrt{1-m^2}$$

La *tangente* se obtiene de la fórmula 2):

$$\text{tg}\,\alpha = \pm\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$$

La *cotangente* es inversa de la tangente:

$$\text{cotg}\,\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$$

La *secante* es inversa del coseno:

$$\sec\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}$$

La *cosecante* es inversa del seno:

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{m}$$

II. Conociendo el coseno. — Supongamos que $\cos \alpha = m$.

Por un procedimiento análogo al anterior, obtendríamos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{1-m^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \pm \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}; \quad \sec \alpha = \frac{1}{m}; \quad \operatorname{cosec} \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}$$

III. Conociendo la tangente. — Sea $\operatorname{tg} \alpha = m$.

Sacando el valor de sen α en la 2) y sustituyendo en la 1), resulta

$$\cos^2 \alpha (1+m^2) = 1$$

de donde fácilmente se deduce:

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}; \qquad \operatorname{sen} \alpha = \pm \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

Las restantes razones son las recíprocas de las halladas:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{m}; \quad \sec \alpha = \pm \sqrt{1+m^2}; \quad \operatorname{cosec} \alpha = \pm \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$$

IV. Conociendo la cotangente, la secante o la cosecante. — Como estas razones son las recíprocas, respectivamente, de la tangente, del coseno y del seno, al darnos

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{cotg} \alpha = m \\ \sec \alpha = m \\ \operatorname{cosec} \alpha = m \end{array}\right\} \text{ es como si nos dieran } \left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{m} \\ \cos \alpha = \frac{1}{m} \\ \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{m} \end{array}\right.$$

190. Explicación del doble signo. Ángulos correspondientes a una razón trigonométrica dada. — Como hemos visto, en muchas de las fórmulas deducidas anteriormente aparece un doble signo. Algebraicamente lo explica la raíz cuadrada, ya que, como sabemos, puede ser positiva o negativa. Pero, trigonométricamente, el doble signo que ha resultado responde a una realidad.

En efecto: si suponemos, por ejemplo, que nos dan el valor m correspondiente a un seno, sabemos que hay dos ángulos, α y $180° - \alpha$, me-

nores que 360°, que tienen por seno el valor dado, mientras que las razones correspondientes al coseno, tangente, cotangente y secante serán dos números opuestos, teniendo la cosecante un sólo valor (núm. 182).

Si conociéramos el ángulo α, o supiéramos en qué cuadrante termina, quedaría determinado el signo que corresponde a todas sus razones trigonométricas, con lo cual desaparecería la ambigüedad respecto al signo.

191. Razones de algunos ángulos sencillos. — TEOREMA. — *En todo polígono regular convexo de* n *lados, la razón del lado al doble del radio es igual al seno de* $\frac{180°}{n}$.

En efecto: sea AB (fig. 105) el lado del polígono considerado, al que llamaremos l. El radio de dicho polígono será $OA = OB = r$.

Si trazamos desde O una perpendicular OC a AB, pasará por el punto medio del lado AB.

El ángulo en el centro de un polígono regular convexo de n lados es $\frac{360°}{n}$; por tanto, en la figura, $COA = \frac{180°}{n}$.

Pero, por definición de seno,

$$\operatorname{sen} COA = \operatorname{sen} \frac{180}{n} = \frac{l:2}{r} = \frac{l}{2r}$$

que es lo que se quería demostrar.

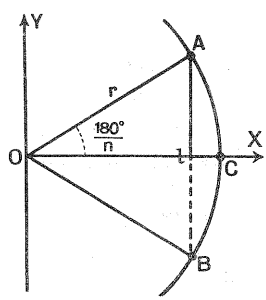


FIG. 105

APLICACIÓN. — *Cálculo de las razones trigonométricas de algunos ángulos.*

Si en la ecuación que resume la propiedad anterior,

$$\operatorname{sen} \frac{180}{n} = \frac{l}{2r} \qquad [9]$$

sustituímos n por 3, 4, 5, 6 y 10, tendremos que el polígono regular será el triángulo equilátero, el cuadrado, el pentágono, el hexágono y el decágono, respectivamente.

Teniendo en cuenta la expresión del lado en función del radio, en dichos polígonos, se tendrá:

$$l_3 = r\sqrt{3} \qquad \operatorname{sen}\frac{180^\circ}{3} = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{l_3}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad [10]$$

$$l_4 = r\sqrt{2} \qquad \operatorname{sen}\frac{180^\circ}{4} = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{l_4}{2r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad [11]$$

$$l_5 = \frac{r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2} \qquad \operatorname{sen}\frac{180^\circ}{5} = \operatorname{sen} 36^\circ = \frac{l_5}{2r} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \qquad [12]$$

$$l_6 = r \qquad \operatorname{sen}\frac{180^\circ}{6} = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{l_6}{2r} = \frac{1}{2} \qquad [13]$$

$$l_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) \qquad \operatorname{sen}\frac{180^\circ}{10} = \operatorname{sen} 18^\circ = \frac{l_{10}}{2r} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \qquad [14]$$

Conocido el seno de cada uno de estos ángulos, se podrán calcular fácilmente las demás razones trigonométricas (núm. 189, I).

EJERCICIOS

427. Consultando los valores dados en la tabla de razones trigonométricas que figura al final del libro, calcular las razones trigonométricas de los ángulos:

a) 150°; 210°; 330°
b) 120°; 240°; 300°
c) 135°; 225°; 315°
d) 765°; 855°; 1.470°

428. El seno, coseno y tangente del ángulo de 20° son 0'342, 0'938 y 0'346, respectivamente. Calcular el seno, coseno y tangente de los ángulos 70°, 110° 160°, 200° y 340°.

429. Calcular el seno, coseno y tangente de los ángulos siguientes:
a) 1.470° *b)* 1.935° *c)* 2.385° *d)* 2.115° *e)* −240°

430. De entre los infinitos ángulos definidos por las ecuaciones siguientes, determinar gráficamente los dos que son menores que 360°:

1. $\operatorname{sen} \alpha_1 = \frac{3}{4}$
2. $\operatorname{sen} \alpha_2 = -\frac{2}{3}$
3. $\cos \alpha_3 = \frac{1}{4}$
4. $\cos \alpha_4 = -\frac{3}{4}$
5. $\operatorname{tg} \alpha_5 = 1$
6. $\operatorname{tg} \alpha_6 = 1'7$
7. $\operatorname{cosec} \alpha_7 = \frac{4}{3}$
8. $\operatorname{cosec} \alpha_8 = -\frac{3}{2}$
9. $\sec \alpha_9 = 4$
10. $\sec \alpha_{10} = -\frac{4}{3}$
11. $\operatorname{cotg} \alpha_{11} = -\frac{1}{2}$
12. $\operatorname{cotg} \alpha_{12} = +\frac{1}{3}$

Resolver las siguientes ecuaciones:

431. $\operatorname{sen} x = 0$; $\operatorname{sen} x = -1$; $\operatorname{sen} x = 1$; $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$; $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$

432. $\cos x = 1$; $\cos x = -1$; $\cos x = 0$; $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

433. $\operatorname{tg} x = 0$; $\operatorname{tg} x = 1$; $\operatorname{tg} x = -1$; $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; $\operatorname{tg} x = \infty$

434. $\operatorname{cotg} x = -1$; $\operatorname{cotg} x = 1$; $\operatorname{cotg} x = \sqrt{3}$; $\operatorname{cotg} x = -\sqrt{3}$; $\operatorname{cotg} x = \infty$

435. Dado el seno de los siguientes ángulos, calcular el valor de las demás razones trigonométricas de cada uno, sabiendo que $90° < \alpha < 180°$:

a) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$; *b)* $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; *c)* $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$.

436. Dado el coseno de los ángulos siguientes, calcular las demás razones trigonométricas de cada uno, sabiendo que $90° < \alpha < 180°$:

a) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$; *b)* $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$; *c)* $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$.

437. Dada la tangente de los ángulos siguientes, calcular las demás razones trigonométricas de cada uno, sabiendo que $90° < \alpha < 180°$:

a) $\operatorname{tg} \alpha = -1$; *b)* $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; *c)* $\operatorname{tg} \alpha = -2$.

438. Dada la secante de los ángulos siguientes, calcular las demás razones trigonométricas de cada uno, sabiendo que $0° < \alpha < 90°$:

a) $\sec \alpha = \frac{4}{3}$; *b)* $\sec \alpha = 2$; *c)* $\sec \alpha = \sqrt{3}$.

439. Sabiendo que $\operatorname{sen} 36° = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$ y $\cos 36° = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$ determinar el seno y coseno de los ángulos 54°, 126° y 324°.

440. Hallar los ángulos positivos y menores de 360° que tengan alguna razón trigonométrica igual a las del ángulo $\alpha = 32° \ 17' \ 22''$.

441. Comprobar la igualdad $\operatorname{sen} \varphi_1 = \cos \varphi_2$, si $\varphi_1 - \varphi_2 = 90°$ para los valores de φ_2 iguales a 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 135° y 210°.

25. Proyecciones. Teoremas de adición de ángulos

192. Proyección ortogonal de un punto sobre una recta. — *Proyección ortogonal de un punto sobre una recta, es el pie de la perpendicular trazada desde el punto a la recta.*

La recta se llama *eje de proyección,* y la perpendicular trazada, *proyectante.* En la figura 106, P' es la proyección del punto P sobre el eje $X'X$.

193. Proyección ortogonal de un segmento sobre un eje. — *Es el segmento de eje comprendido entre las proyecciones de los extremos del segmento dado.* En la figura 106, el segmento $A'B'$ es la proyección de AB sobre el eje $X'X$.

Si los segmentos que se proyectan son *orientados,* es decir, si en ellos uno de los extremos se considera como origen y el otro como término, entonces las proyecciones que resultan estarán también dotadas de sentido. Se considera *positivo* el sentido de la proyección cuando ésta va hacia la derecha, y *negativo,* si va hacia la izquierda. Así, en la figura 106, la proyección de AB es $+A'B'$, mientras que la de CD es $-C'D'$.

Expresaremos que $A'B'$ es la proyección de AB mediante la notación

$$\text{proy. } (AB) = A'B'$$

que se lee: proyección de AB es igual a $A'B'$.

194. Proyección ortogonal de una línea quebrada sobre un eje. — *Se llama proyección de una línea quebrada sobre un eje a la suma algebraica de las proyecciones de los segmentos que la componen.* Así (figura 107),

$$\text{proy. } (ABCDE) = \text{proy. } (AB) + \text{proy. } (BC) + \text{proy. } (CD) + \text{proy. } (DE)$$

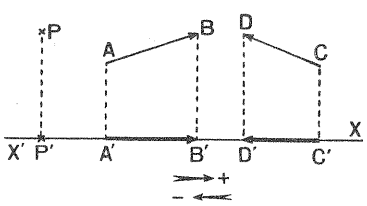


FIG. 106

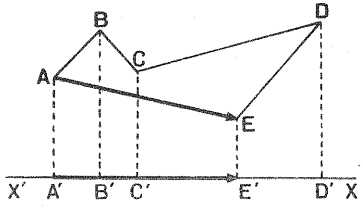


FIG. 107

RESULTANTE *de una línea quebrada es el segmento rectilíneo que une el origen con el extremo de la quebrada.* Así, AE es la resultante de la quebrada $ABCDE$.

TEOREMA. *La proyección de una línea quebrada es igual a la proyección de su resultante.*

En efecto: sea la quebrada $ABCDE$ (fig. 107) cuya resultante ya hemos dicho que es AE. Se tiene:

$$\text{proy. } (ABCDE) = \text{proy. } (AB) + \text{proy. } (BC) + \text{proy. } (CD) + \text{proy. } (DE) =$$
$$= A'B' + B'C' + (C'E' + E'D') + D'E' = A'E' = \text{proy. } (AE)$$

ya que los segmentos $E'D'$ y $D'E'$ se anulan, por ser iguales y de sentido contrario.

195. Valor trigonométrico de la proyección de un segmento sobre un eje. — TEOREMA. *La proyección de un segmento sobre un eje coplanario, es igual a la longitud del segmento por el coseno del ángulo de proyección.*

Para demostrarlo, consideremos la figura 108, en donde la proyección del segmento l está representada por p.

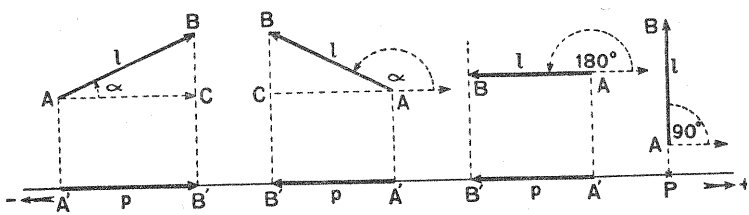


FIG. 108

Llamamos *ángulo de proyección*, α, al ángulo que forma el segmento l con el *sentido positivo* del eje de proyección.

Esto supuesto, tenemos que, por definición de coseno,

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{p}{l}, \text{ de donde, } \quad p = l \cdot \cos \alpha \qquad [15]$$

196. Seno y coseno de la suma de dos ángulos. — Conocidos el seno y el coseno de los ángulos a y b (fig. 109), vamos a calcular el seno y el coseno del ángulo suma $a + b$.

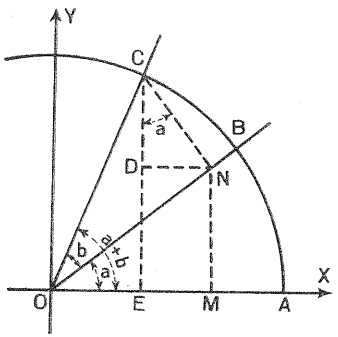


FIG. 109

Tracemos $CN \perp OB$, $CE \perp OA$, $MN \perp OA$ y $DN \parallel OA$.

El ángulo $NCD = a$, por tener entre sí los lados perpendiculares.

$ON = OC \cdot \cos b$, pues ON es la proyección de OC sobre OB.

$CD = CN \cdot \cos a$, por análoga razón.

$\frac{CN}{OC} = \text{sen } b$; luego, $CN = OC \cdot \text{sen } b$.

$\frac{DN}{CN} = \text{sen } a$; luego, $DN = CN \cdot \text{sen } a$.

$$\frac{MN}{ON} = \text{sen } a; \quad \text{por tanto,} \quad MN = ON \cdot \text{sen } a = DE.$$

$$\frac{OM}{ON} = \cos a; \quad \text{por tanto,} \quad OM = ON \cdot \cos a.$$

$$\text{sen } (a+b) = \frac{CE}{OC} = \frac{CD + MN}{OC} = \frac{CN \cos a + ON \text{ sen } a}{OC} =$$

$$= \frac{OC \text{ sen } b \cos a + OC \cos b \text{ sen } a}{OC} = \text{sen } a \cos b + \cos a \text{ sen } b \quad [16]$$

$$\cos (a+b) = \frac{OE}{OC} = \frac{OM - DN}{OC} = \frac{ON \cos a - CN \text{ sen } a}{OC} =$$

$$= \frac{OC \cos b \cos a - OC \text{ sen } b \text{ sen } a}{OC} = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b \quad [17]$$

197. Seno y coseno de la diferencia de dos ángulos. — Las fórmulas deducidas en el número anterior son válidas para cualquier valor de a y b. Si en ellas damos a b el valor $-b$, se tiene:

$$\text{sen } [a+(-b)] = \text{sen } a \cos (-b) + \cos a \text{ sen } (-b) =$$
$$= \text{sen } (a-b) = \text{sen } a \cos b - \cos a \text{ sen } b \quad [18]$$

$$\cos [a+(-b)] = \cos a \cos (-b) - \text{sen } a \text{ sen } (-b) =$$
$$= \cos (a-b) = \cos a \cos b + \text{sen } a \text{ sen } b \quad [19]$$

198. Tangente de la suma y de la diferencia de dos ángulos.

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$

Dividiendo los dos términos de la fracción por $\cos a \cos b$, se tiene:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a \cos b}{\cos a \cos b} + \dfrac{\cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \dfrac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}} = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \qquad [20]$$

Análogamente: $\operatorname{tg}(a-b) = \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$ [21]

199. Cotangente de la suma y de la diferencia de dos ángulos.

$$\operatorname{cotg}(a+b) = \frac{\cos(a+b)}{\operatorname{sen}(a+b)} = \frac{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b}$$

Dividiendo los dos términos de la fracción por $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$, se tiene:

$$\operatorname{cotg}(a+b) = \frac{\dfrac{\cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} - \dfrac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}}{\dfrac{\operatorname{sen} a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} + \dfrac{\cos a \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}} = \frac{\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b - 1}{\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b} \qquad [22]$$

Análogamente: $\operatorname{cotg}(a-b) = \dfrac{\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b + 1}{\operatorname{cotg} b - \operatorname{cotg} a}$ [23]

200. Razones goniométricas del ángulo doble. — Conocidas las razones goniométricas del ángulo a, vamos a calcular las del ángulo $2a$.

Si en las fórmulas [16], [17], [20] y [22] hacemos $a = b$, se obtiene, respectivamente:

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a \qquad [24]$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a \qquad [25]$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \quad [26] \qquad \operatorname{cotg} 2a = \frac{\operatorname{cotg}^2 a - 1}{2 \operatorname{cotg} a} \quad [27]$$

Recordando que $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$, la ecuación [25] puede expresarse en función de sólo sen a o cos a. En efecto: eliminando, sucesivamente, sen a y cos a, se tiene:

$$\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1 \qquad [28]$$

$$\cos 2a = 1 - \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 a = 1 - 2\,\text{sen}^2 a \qquad [29]$$

201. Problema. — *Dada la tangente de un ángulo, calculad el seno, coseno y tangente del ángulo duplo en función de la tangente dada.*

Como $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$, de las fórmulas [24] y [25], resulta:

$$\text{sen}\, 2a = 2\,\text{sen}\, a \cos a = \frac{2\,\text{sen}\, a \cos a}{\text{sen}^2 a + \cos^2 a} =$$

$$= \frac{\dfrac{2\,\text{sen}\, a \cos a}{\cos^2 a}}{\dfrac{\text{sen}^2 a}{\cos^2 a} + \dfrac{\cos^2 a}{\cos^2 a}} = \frac{2\,\text{tg}\, a}{1 + \text{tg}^2 a} \qquad [30]$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a = \frac{\cos^2 a - \text{sen}^2 a}{\cos^2 a + \text{sen}^2 a} =$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2 a}{\cos^2 a} - \dfrac{\text{sen}^2 a}{\cos^2 a}}{\dfrac{\cos^2 a}{\cos^2 a} + \dfrac{\text{sen}^2 a}{\cos^2 a}} = \frac{1 - \text{tg}^2 a}{1 + \text{tg}^2 a} \qquad [31]$$

Recordemos (núm. 200), que $\text{tg}\, 2a = \dfrac{2\,\text{tg}\, a}{1 - \text{tg}^2 a}$

202. Razones goniométricas del ángulo mitad. — Por ser válidas las fórmulas del número 200 para cualquier valor de a, podemos sustituir $2a$ por a y a por $\dfrac{a}{2}$, con lo cual resultará:

$$\text{sen}\, a = 2\,\text{sen}\, \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \qquad [32] \qquad \cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \text{sen}^2 \frac{a}{2} \qquad [33]$$

$$\text{tg}\, a = \frac{2\,\text{tg}\, \dfrac{a}{2}}{1 - \text{tg}^2 \dfrac{a}{2}} \qquad [34] \qquad \text{cotg}\, a = \frac{\text{cotg}^2 \dfrac{a}{2} - 1}{2\,\text{cotg}\, \dfrac{a}{2}} \qquad [35]$$

203. Problema. — *Conocido cos* a, *determinar cos* $\frac{a}{2}$, *sen* $\frac{a}{2}$ *y tg* $\frac{a}{2}$, *o sea, dado el coseno de un ángulo, hallar las razones trigonométricas del ángulo mitad.*

En el sistema
$$\begin{cases} 1 = \cos^2 \dfrac{a}{2} + \operatorname{sen}^2 \dfrac{a}{2} \\ \cos a = \cos^2 \dfrac{a}{2} - \operatorname{sen}^2 \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

sumando y restando miembro a miembro, se tiene:

$$1 + \cos a = 2\cos^2 \frac{a}{2}; \qquad 1 - \cos a = 2\operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

$$\cos \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} \quad [36] \qquad \operatorname{sen} \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} \quad [37]$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} \quad [38]$$

204. OBSERVACIÓN. — Como se ve, para cada función corresponden dos valores iguales y de sentido contrario. La ambigüedad de signo desaparece cuando se conoce el valor del ángulo *a*, ya que entonces puede deducirse el signo que corresponde a cada una de las razones trigonométricas de *a*/2.

EJEMPLO. — Dado el $\cos 315° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, determinar el seno, coseno y tangente del ángulo mitad 157° 30′.

El seno de 157° 30′ es positivo por estar comprendido entre 90° y 180°. El coseno y la tangente son negativos. Aplicando las fórmulas del núm. 203, resulta:

$$\operatorname{sen}\,(157°\ 30') = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}; \qquad \cos\,(157°\ 30') = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$\operatorname{tg}\,(157°\ 30') = -(\sqrt{2} - 1) = 1 - \sqrt{2}$$

205. Problema. — *Conocido sen* a, *determinar sen* $\frac{a}{2}$, *cos* $\frac{a}{2}$ *y tg* $\frac{a}{2}$.

Podemos escribir el sistema
$$\begin{cases} 1 = \operatorname{sen}^2 \dfrac{a}{2} + \cos^2 \dfrac{a}{2} \\ \operatorname{sen} a = 2\operatorname{sen} \dfrac{a}{2} \cos \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

y sumando y restando miembro a miembro, resulta:

$$\begin{cases} 1 + \operatorname{sen} a = \left(\operatorname{sen}\dfrac{a}{2} + \cos\dfrac{a}{2}\right)^2 \\ 1 - \operatorname{sen} a = \left(\operatorname{sen}\dfrac{a}{2} - \cos\dfrac{a}{2}\right)^2 \end{cases} \quad \text{o sea:} \quad \begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{a}{2} + \cos\dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{1+\operatorname{sen} a} \\ \operatorname{sen}\dfrac{a}{2} - \cos\dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen} a} \end{cases}$$

y sumando y restando, se obtiene después de despejar:

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{1+\operatorname{sen} a} \pm \sqrt{1-\operatorname{sen} a}\right] \qquad [39]$$

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{1+\operatorname{sen} a} \pm \sqrt{1-\operatorname{sen} a}\right] \qquad [40]$$

Los signos que afectan a estas dos fórmulas son independientes uno de otro; luego, combinándolos de todas las formas posibles, se obtienen *cuatro valores* para el $\operatorname{sen}\dfrac{a}{2}$.

Para hallar la $\operatorname{tg}\dfrac{a}{2}$, podríamos dividir $\operatorname{sen}\dfrac{a}{2}$ por $\cos\dfrac{a}{2}$ en cada una de las cuatro soluciones anteriores, pero es más cómodo utilizar el siguiente procedimiento:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{a}{2}}{\cos\dfrac{a}{2}} = \frac{2\operatorname{sen}\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{a}{2}}{2\cos^2\dfrac{a}{2}} \overset{(*)}{=} \frac{\operatorname{sen} a}{1+\cos a}$$

(multiplicando a los dos términos por 2 cos $a/2$)

o bien, teniendo en cuenta que $\cos a = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}$,

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{\operatorname{sen} a}{1 \pm \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}} \qquad [41]$$

206. OBSERVACIÓN. — Cuando se conoce el valor de a, y, por tanto, el de $\dfrac{a}{2}$, cesa la indeterminación respecto al signo, pues entonces se sabe cuál de las cuatro soluciones hay que tomar, averiguando antes el signo de $\operatorname{sen}\dfrac{a}{2}$ y $\cos\dfrac{a}{2}$ y cuál de estas dos razones trigonométricas tiene mayor valor absoluto.

(*) Recuérdese (núm. 203), que $1 + \cos a = 2\cos^2 a/2$.

EJEMPLO. — Calcular sen 75° y cos 75°, sabiendo que sen 150° = $\frac{1}{2}$. (Obsérvese que 150 = 75 × 2).

El seno y coseno de 75° son positivos, por estar comprendido dicho ángulo en el primer cuadrante, y como está más próximo a 90° que a 0°, el seno será mayor que el coseno. Así que en el sistema (núm. 205)

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{1+\operatorname{sen} a} \\ \operatorname{sen}\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen} a} \end{cases}$$

elegiremos el signo positivo en el segundo miembro de las dos ecuaciones, y resultará:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} 75° + \cos 75° = +\sqrt{1+\frac{1}{2}} = +\sqrt{\frac{3}{2}} = +\frac{\sqrt{6}}{2} \\ \operatorname{sen} 75° - \cos 75° = +\sqrt{1-\frac{1}{2}} = +\sqrt{\frac{1}{2}} = +\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

de donde: $\operatorname{sen} 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\cos 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Para hallar tg 75°, escribiremos: $\operatorname{tg} 75° = \frac{\operatorname{sen} 75°}{\cos 75°} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = 2+\sqrt{3}$

o también, se puede emplear la fórmula [41] antes deducida. Es decir, teniendo en cuenta que tg 75° > 0 y tg 75° > cotg 75°, tendremos:

$$\operatorname{tg} 75° = \frac{\operatorname{sen} 150°}{1-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 150°}} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

207. Problema. — *Conocida la tangente de* a, *determinar la tangente de* $\frac{a}{2}$.

Aunque podríamos obtener $\operatorname{sen}\frac{a}{2}$ y $\cos\frac{a}{2}$ en función de tg a, por ser esas fórmulas de muy poco uso, hallaremos únicamente la $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$.

De la fórmula $\operatorname{tg} a = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$ se deduce $\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} a \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}$

o su igual $\operatorname{tg} a \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{a}{2} - \operatorname{tg} a = 0$

Tenemos ahora una ecuación de segundo grado cuya incógnita es $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$; luego, despejando, resulta

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \operatorname{tg}^2 a}}{2 \operatorname{tg} a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a} \qquad [42]$$

La ambigüedad respecto al signo desaparece cuando se conoce a, ya que entonces puede deducirse el signo que corresponde a la tangente de su mitad.

EJEMPLO. — Sabiendo que $\operatorname{tg} 300° = -\sqrt{3}$, hallar $\operatorname{tg} 150°$.

Como tg 150° es negativa, tendremos:

$$\operatorname{tg} 150° = \frac{-1 + \sqrt{1+3}}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

EJERCICIOS

442. Calcular la proyección de los siguientes segmentos sobre el $X'X$. Todos tienen 20 mm. y forman con el eje el ángulo que se indica en la figura 110.

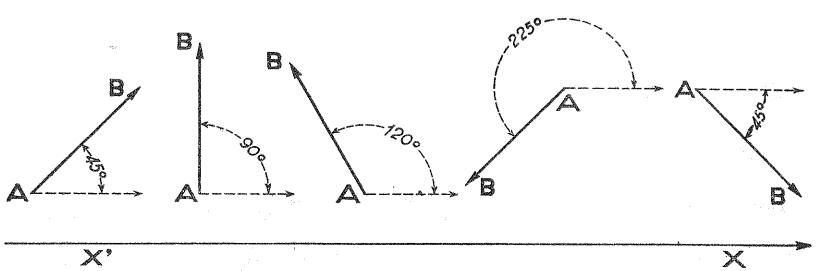


FIG. 110

443. Calcular la proyección de los segmentos AB y CD sobre los ejes $X'X$ e $Y'Y$ (figura 111).

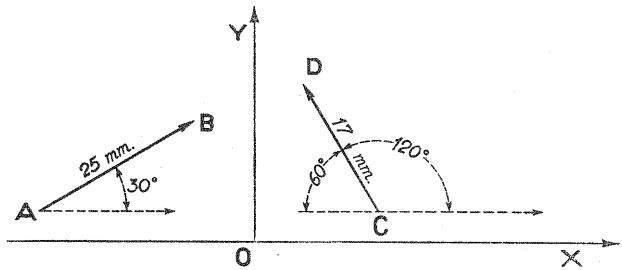


FIG. 111

444. Calcular la proyección de la resultante de la poligonal que resultaría al colocar los segmentos del ejercicio 442, uno a continuación de otro, formando segmentos consecutivos.

445. Calcular el seno, coseno y tangente de 75°, utilizando los valores que figuran en la tabla de razones trigonométricas, del final del libro, y las fórmulas:

$$\text{sen}\,(45°+30°); \qquad \cos\,(45°+30°); \qquad \text{tg}\,(45°+30°)$$

446. Calcular el seno, coseno y tangente de 15°, utilizando la tabla del final del libro y las fórmulas: $\text{sen}\,(45°-30°)$; $\cos\,(45°-30°)$; $\text{tg}\,(45°-30°)$.

447. Calcular el seno, coseno y tangente de 120°, utilizando las fórmulas del número 200 del texto y la tabla del final del libro (*).

448. Sabiendo que $\text{tg}\,30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, calcular el seno, coseno y tangente del ángulo duplo mediante las fórmulas del número 201.

449. Calcular, en función de cos 225°, el seno, coseno y tangente de 112° 30′. (Ver número 203 del texto).

450. Calcular el seno, coseno y tangente de 120° en función de sen 240°. (Ver número 205 del texto).

451. Calcular, en función de cos 300°, el seno, coseno y tangente de 150°. (Ver número 203 del texto).

452. Calcular el seno, coseno y tangente de 105° en función de sen 210°. (Ver número 205).

453. Sabiendo que $\text{tg}\,315° = -1$, calcular la tangente del ángulo 157° 30′, mitad de 315°.

(*) En los problemas siguientes, acúdase a la misma tabla cuando sea preciso.

26. Teoremas de adición de funciones

208. Suma o diferencia de dos senos o de dos cosenos. — Recordemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b \\
\operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b \\
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b
\end{aligned}$$

Sumando y restando entre sí las dos primeras igualdades, y también entre sí las otras dos, se tiene:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) &= 2 \operatorname{sen} a \cos b \\
\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) &= 2 \cos a \operatorname{sen} b \\
\cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2 \cos a \cos b \\
\cos(a+b) - \cos(a-b) &= -2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b
\end{aligned}$$

Haciendo en estas igualdades $a + b = A$ y $a - b = B$ y despejando luego a y b del sistema que resulta, se obtiene:

$$a = \frac{A + B}{2} \qquad \text{y} \qquad b = \frac{A - B}{2}$$

Con estas equivalencias, las cuatro igualdades anteriores se transforman en:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} \qquad [43]$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \operatorname{sen} \frac{A - B}{2} \qquad [44]$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} \qquad [45]$$

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A + B}{2} \operatorname{sen} \frac{A - B}{2} \qquad [46]$$

Las cuatro fórmulas obtenidas sirven para *hacer calculables por logaritmos la suma o diferencia de dos senos o de dos cosenos.* Expresándolas en el lenguaje ordinario, diremos:

LA SUMA DE LOS SENOS *de dos ángulos, es igual al duplo del producto del seno de su semisuma por el coseno de su semidiferencia.*

LA DIFERENCIA DE LOS SENOS *de dos ángulos, es igual al duplo del producto del coseno de su semisuma por el seno de su semidiferencia.*

LA SUMA DE LOS COSENOS *de dos ángulos, es igual al duplo del producto del coseno de su semisuma por el de su semidiferencia.*

LA DIFERENCIA DE LOS COSENOS *de dos ángulos, es igual a menos el duplo del producto del seno de la semisuma por el seno de la semidiferencia.*

209. Suma o diferencia de dos tangentes. — Fácilmente se deduce que

$$\operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} \pm \frac{\operatorname{sen} B}{\cos B} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B}{\cos A \cdot \cos B} = \frac{\operatorname{sen} (A \pm B)}{\cos A \cdot \cos B} \qquad [47]$$

210. Razón de la suma a la diferencia de dos senos. — Dividiendo la fórmula [43] por la [44], se obtiene:

$$\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B} = \frac{2 \operatorname{sen} \dfrac{A+B}{2} \cos \dfrac{A-B}{2}}{2 \cos \dfrac{A+B}{2} \operatorname{sen} \dfrac{A-B}{2}} =$$

$$= \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} \operatorname{cotg} \frac{A-B}{2} = \frac{\operatorname{tg} \dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{A-B}{2}} \qquad [48]$$

EJERCICIOS

Transformar las siguientes expresiones en otras calculables por logaritmos

454. $\operatorname{sen} 75° + \operatorname{sen} 45°$

455. $\operatorname{sen} 45° - \operatorname{sen} 30°$

456. $\cos 75° + \cos 45°$

457. $\cos 45° - \cos 30°$

458. $\dfrac{\operatorname{sen} 75° + \operatorname{sen} 45°}{\operatorname{sen} 75° - \operatorname{sen} 45°}$

459. $\dfrac{\operatorname{sen} 60° + \operatorname{sen} 30°}{\operatorname{sen} 60° - \operatorname{sen} 30°}$

Hallar el logaritmo de las expresiones siguientes (*):

460. $\operatorname{sen} 35° + \operatorname{sen} 12°$

461. $\operatorname{sen} 35° - \operatorname{sen} 12°$

462. $\cos 48° + \cos 15°$

463. $\cos 48° - \cos 15°$

464. $\operatorname{tg} 44° \pm \operatorname{tg} 21°$

465. $\dfrac{\operatorname{sen} 63° + \operatorname{sen} 27°}{\operatorname{sen} 63° - \operatorname{sen} 27°}$

(*) Estos ejercicios deberán hacerse después de estudiar el manejo de las *Tablas Trigonométricas* en la lección siguiente.

27. Tablas trigonométricas

211. Tablas trigonométricas naturales. — Vimos en otro lugar cómo pueden hallarse las razones trigonométricas de algunos ángulos sencillos; el problema de calcular las de un ángulo cualquiera no resulta siempre fácil, y su solución corresponde al CÁLCULO INFINITESIMAL, parte de las Matemáticas que se estudia en cursos superiores. Por ahora, nos basta saber que ese trabajo está ya realizado y que los valores de las funciones circulares se hallan catalogados de *n* en *n* minutos, o segundos, formando unos cuadros llamados *tablas trigonométricas naturales.*

Los dos problemas que pueden presentarse en el manejo de las tablas trigonométricas naturales, estudiados ya en 3.er Curso, son los siguientes:

1.° PROBLEMA DIRECTO. — *Dado un ángulo, o un arco, hallar el valor de sus razones trigonométricas.*

2.° PROBLEMA INVERSO. — *Dado el valor de una razón trigonométrica, hallar el ángulo a que corresponde.*

212. Tablas logaritmo-trigonométricas. — Mucho más usadas que las naturales son las tablas *logaritmo-trigonométricas,* las cuales están dispuestas como las de valores naturales, pero en lugar de darnos el valor de las funciones, nos dan el logaritmo de dicho valor.

Tanto unas como otras, las tablas trigonométricas contienen solamente las razones, o los logaritmos de esas razones, correspondientes a los ángulos del *primer cuadrante,* ya que, merced a las relaciones expuestas en los números 180 a 187, es fácil deducir las que corresponden a cualquier otro ángulo.

Por otra parte, como las razones de un ángulo se relacionan con las del complemento, en el sentido de que el seno de uno es igual al coseno del otro, la tangente es igual a la cotangente y la secante es igual a la cosecante, al construir una tabla y llegar a las funciones de un ángulo mayor que 45°, esas funciones ya figurarán en las tablas como cofunciones del complemento, que será inferior a 45°. Por eso, se suele evitar el dar a las tablas demasiada extensión, abriendo un encabezamiento en la parte inferior de sus páginas para los ángulos mayores de 45°.

En el manejo de las tablas logaritmo-trigonométricas se presentan los dos problemas siguientes, similares a los que ofrecen las tablas de valores naturales:

1.° PROBLEMA DIRECTO. — *Dado un ángulo, o un arco, hallar el logaritmo de sus razones trigonométricas.*

2.° PROBLEMA INVERSO. — *Dado el logaritmo de una razón trigonométrica, hallar el ángulo correspondiente.*

213. Dado un ángulo, hallar el logaritmo de sus razones trigonométricas. — PRIMER CASO. — *Que el ángulo esté comprendido exactamente en las tablas.*

Si el ángulo es inferior a 45°, se buscarán los grados en la parte superior de las páginas y los minutos en la primera columna de la izquierda, que crece de arriba a abajo; hecho esto, en la horizontal a que hayamos llegado, estará el logaritmo de la razón trigonométrica que se busca.

EJEMPLOS: 1.° log sen 20° 27′ = $\bar{1}$'543310; 2.° log tg 20° 56′ = $\bar{1}$'582665

Si el ángulo es superior a 45°, se buscarán los grados en la parte inferior de las páginas y los minutos en la primera columna de la derecha, que crece de abajo a arriba; en la horizontal a que hayamos llegado, se encontrará el logaritmo que se pide.

EJEMPLOS: 1.° log cos 69° 44′ = $\bar{1}$'539565; 2.° log cotg 69° 7′ = $\bar{1}$'581528

SEGUNDO CASO. — *Que el ángulo esté comprendido entre* 4° *y* 86°, *ambos inclusive, pero no se halle exactamente en las tablas.*

Admitiendo, por un razonamiento análogo al empleado cuando se trataba de logaritmos numéricos, que *las diferencias de los ángulos son proporcionales a las diferencias de los logaritmos de sus razones trigonométricas*, podremos razonar del siguiente modo:

Si al diferenciarse dos ángulos en 60″ (o en 30″) (1)
los logaritmos de una razón se diferencian en D (dif. tabular),
al diferenciarse dos ángulos en h'' (exceso numérico)
los logaritmos se diferencian en ..... d (ex. logarítmico).

(1) De entre las tablas más usadas en España, las de VÁZQUEZ QUEIPO dan los *logaritmos de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes, de minuto en minuto*, y las de SÁNCHEZ RAMOS, los *logaritmos de los senos, cosenos, tangentes, cotangentes, secantes y cosecantes, de* 30 *en* 30 *segundos.*

De donde se deduce la siguiente proporción

$$\frac{60''}{h''} = \frac{D}{d}$$

h'' = segundos del ángulo dado.
D = dif. tabular entre dos logaritmos consecutivos de las tablas.
d = exceso que hay que sumar al logaritmo hallado en las tablas.

y, despejando,

$$d = \frac{h'' \cdot D}{60''} = h'' \cdot \frac{D}{60''} \quad (1)$$

Este valor de d es POSITIVO, cuando la diferencia tabular D es positiva, es decir, para los *senos, tangentes* y *secantes*, y NEGATIVO, cuando D es negativa, o sea, para los *cosenos, cotangentes* y *cosecantes*.

De lo anterior, se deduce la siguiente

REGLA. — *Para hallar el logaritmo de las razones trigonométricas de un ángulo comprendido entre* 4° *y* 86°, *pero que no se encuentra exactamente en las tablas:*

1.° *Se halla el logaritmo tabular de la razón trigonométrica del ángulo más próximo inferior al dado.*

2.° *Se halla el producto de la parte proporcional a* 1″, *por los segundos del ángulo dado, tomando en el resultado el entero más próximo, el cual expresará unidades del sexto orden decimal (por expresar la parte proporcional a* 1″, *unidades de ese orden).*

3.° *El producto anterior se suma algebraicamente (teniendo en cuenta el signo) al logaritmo tabular hallado.*

EJEMPLO 1.° Hallar el logaritmo seno de 20° 2′ 18″.

En las tablas encontraremos:

$$\log \operatorname{sen} 20° \; 2' = \overline{1}'534745$$

la parte proporcional a 1″ es 5'77, y como $h'' = 18''$, se tendrá:

$$d = 18 \times 5'77 = 104$$

(1) Algunas tablas, como las de Vázquez Queipo dan ya efectuado el cociente $D : 60$, o parte proporcional correspondiente a un segundo. Dicha parte proporcional se encuentra en las columnas encabezadas por 1″, a la derecha del seno y coseno, o entre la tangente y cotangente. La misma parte proporcional sirve para cinco o más minutos consecutivos, habiéndose calculado tomando el término medio entre las correspondientes diferencias tabulares, lo cual ningún error sensible ocasiona.

de donde

$$\begin{array}{rl} \log \text{sen } 20^\circ\ 2' \ldots\ldots & = \bar{1}'534745 \\ 18 \times 5'77 \ldots\ldots & = \quad 104 \\ \hline \log \text{sen } 20^\circ\ 2'\ 18'' \ldots\ldots & = \bar{1}'534849 \end{array}$$

EJEMPLO 2.º Hallar el logaritmo tangente de 69° 40′ 30″.

$$\begin{array}{rl} \log \text{tg } 69^\circ\ 40' \ldots\ldots & = 0'431127 \\ 30 \times 6'47 \ldots\ldots & = \quad 194 \\ \hline \log \text{tg } 69^\circ\ 40'\ 30'' \ldots\ldots & = 0'431321 \end{array}$$

EJEMPLO 3.º Hallar el logaritmo coseno de 20° 37′ 20″.

$$\begin{array}{rl} \log \cos 20^\circ\ 37' \ldots\ldots & = \bar{1}'971256 \\ 20 \times (-0'79) \ldots\ldots & = \quad -16 \\ \hline \log \cos 20^\circ\ 37'\ 20'' \ldots\ldots & = \bar{1}'971240 \end{array}$$

EJEMPLO 4.º Hallar el logaritmo cotangente de 69° 25′ 15″.

$$\begin{array}{rl} \log \text{cotg } 69^\circ\ 25' \ldots\ldots & = \bar{1}'574660 \\ 15 \times (-6'39) \ldots\ldots & = \quad -96 \\ \hline \log \text{cotg } 69^\circ\ 25'\ 15'' \ldots\ldots & = \bar{1}'574564 \end{array}$$

TERCER CASO. — *Que el ángulo sea inferior a* 4° *o superior a* 86° *y no se halle exactamente en las tablas.*

El procedimiento empleado para hallar los logaritmos de las razones trigonométricas en el caso anterior, no es aplicable a estos ángulos, porque las diferencias varían muy rápidamente y se cometerían errores notables admitiendo el principio de interpolación por partes proporcionales antes empleado.

Para deducir la regla que debemos seguir en este caso, consideremos un ángulo inferior a 4°, y reduzcámosle a segundos. Si designamos por a al número que expresa el valor en segundos del ángulo más próximo al dado que figura en la tabla, y por h a los segundos del ángulo propuesto no contenidos en a, se podrán admitir, por tratarse de ángulos pequeños, las proporciones:

$$\frac{\text{sen } (a+h)}{a+h} = \frac{\text{sen } a}{a} \qquad \text{y} \qquad \frac{\text{tg } (a+h)}{a+h} = \frac{\text{tg } a}{a}$$

porque la razón del seno al ángulo, o de la tangente al ángulo, tienden hacia la unidad, cuando el ángulo tiende a cero.

Tomando logaritmos en ambas fórmulas y despejando, resulta:

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen}(a+h) &= \log(a+h) + [\log \operatorname{sen} a - \log a] \\ \log \operatorname{tg}(a+h) &= \log(a+h) + [\log \operatorname{tg} a - \log a] \end{aligned} \qquad [49]$$

Las tres operaciones del segundo miembro, se pueden reducir a dos, calculando las diferencias que hay entre corchetes. En casi todas las tablas, los valores de dichas diferencias se hallan escritos entre las columnas seno y tangente, correspondiéndose con los ángulos a que pertenecen. Como todas las diferencias tienen igual la característica y las tres primeras cifras de la mantisa, esta parte común, que es $\overline{6}$'685, se indica al principio y al fin de las columnas, no figurando en ellas sino las tres últimas cifras [1].

Como resumen de lo dicho, podemos enunciar la siguiente

REGLA. — *Para hallar el logaritmo seno o tangente de un ángulo inferior a* 4°, *no contenido exactamente en las tablas:*

1.° *Se reduce el ángulo a segundos, y se halla su logaritmo en la tabla de los números.*

2.° *El logaritmo hallado se suma con la diferencia escrita en las tablas trigonométricas, en la horizontal correspondiente al seno o a la tangente del ángulo dado, prescindiendo de los* h″ *de que consta.*

EJEMPLO 1.° Hallar el logaritmo seno de 3° 43′ 20″.

$$\begin{aligned} &\log 3°\ 43'\ 20'' = \log 13.400'' \ldots\ldots = 4'127105 \\ &\log \operatorname{sen} 3°\ 43' - \log 3°\ 43' = d \ldots\ldots = \overline{6}'685270 \\ &\log \operatorname{sen} 3°\ 43'\ 20'' \ldots\ldots = \overline{2}'812375 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.° Hallar el logaritmo tangente de 2° 18′ 14″,2.

$$\begin{aligned} &\log 2°\ 18'\ 14'',2 = \log 8.294'',2 \ldots\ldots = 3'918774 \\ &d \ldots\ldots = \overline{6}'685808 \\ &\log \operatorname{tg} 2°\ 18'\ 14'',2 \ldots\ldots = \overline{2}'604582 \end{aligned}$$

En el caso del COSENO DE ÁNGULOS INFERIORES A 4°, se aplica el método de las partes proporcionales por ser pequeñas las diferencias de los logaritmos de dos ángulos consecutivos, las cuales no exceden de 9 unidades del orden de la última cifra. Esto hace que pueda efectuarse la

(1) Cuando estas cifras van seguidas de un asterisco, éste indica que es necesario aumentar en una unidad la última cifra de $\overline{6}$'685, es decir, que debe escribirse $\overline{6}$'686.

operación mentalmente. En la práctica, apenas si se usa esta razón trigonométrica para ángulos pequeños, por la poca aproximación que da.

Para el cálculo del logaritmo de la COTANGENTE DE ÁNGULOS INFERIORES A 4°, basta tener presente que

$$\operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}; \qquad \log \operatorname{cotg} a = -\log \operatorname{tg} a = \operatorname{colog} \operatorname{tg} a;$$

es decir, se hallará el logaritmo de la tangente del ángulo dado y se toma luego su cologaritmo, el cual será el logaritmo de la cotangente pedida.

Las RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS COMPRENDIDOS ENTRE 86° y 90° se determinan por las relaciones ya conocidas entre las razones de ángulos complementarios (núm. 181).

Designando por a a un ángulo comprendido entre 86° y 90°, se puede escribir:

$$\log \operatorname{sen} a = \log \cos (90° - a)$$
$$\log \cos a = \log \operatorname{sen} (90° - a)$$
$$\log \operatorname{tg} a = \log \operatorname{cotg} (90° - a) = \operatorname{colog} \operatorname{tg} (90° - a)$$
$$\log \operatorname{cotg} a = \log \operatorname{tg} (90° - a)$$

EJEMPLO: Hallar el logaritmo tangente de 87° 48′ 36″,5.

$\log \operatorname{tg} 87° 48' 36'',5 = \log \operatorname{cotg} 2° 11' 23'',5 = \operatorname{colog} \operatorname{tg} 2° 11' 23'',5 = 1'417494.$

214. Dado el logaritmo de una razón trigonométrica, hallar el ángulo, inferior a 90°, a que pertenece.

PRIMER CASO. — *Que el logaritmo dado se encuentre en las tablas.*

Se le buscará en la columna correspondiente del mismo nombre que la razón dada, sea leyendo los títulos en la parte superior o bien haciéndolo en la inferior. Para encontrarle más rápidamente, se ha de tener presente que los senos y tangentes crecen en el intervalo 0° a 90° y los cosenos y cotangentes disminuyen en ese mismo intervalo.

Si el nombre de la razón cuyo logaritmo se ha buscado, corresponde al título superior de la columna, el número de grados será el de la parte superior de la página, y los minutos se leerán en la columna correspondiente de la izquierda. Si, por el contrario, el logaritmo corresponde al título inferior de la columna, el número de grados será el de la parte inferior de la página, y los minutos se encontrarán en la parte derecha.

EJEMPLOS: 1.º, si log cos $x = \bar{1}'972663$, será $x = 20°\ 7'$
2.º, si log tg $x = 0'427648$, será $x = 69°\ 31'$

SEGUNDO CASO. — *Que el logaritmo dado no se halle en las tablas, pero pertenezca a un ángulo comprendido entre* 4° *y* 86°.

Supongamos que $L + d$ es el logaritmo de una razón trigonométrica, y que cumple las condiciones expresadas; sean L y $L + D$ los dos logaritmos tabulares entre los cuales se encuentra el dado; llamando a y $a + 60''$ a los ángulos correspondientes a esos logaritmos y $a + h''$ al que corresponde a $L + d$, se tendrá:

$$\frac{(a+60'')-a}{(a+h'')-a} = \frac{(L+D)-L}{(L+d)-L} \quad \text{o bien,} \quad \frac{60''}{h''} = \frac{D}{d}$$

de donde, $$h'' = \frac{60'' \cdot d}{D} = \frac{60''}{D} \cdot d$$

y el ángulo buscado será $$a + h'' = a + \frac{60''}{D} \cdot d$$

Hay que tener presente que cuando se trata de *senos* y *tangentes*, d es la diferencia entre el logaritmo dado y el *próximo inferior* de las tablas, por lo que d y D serán *positivas;* en cambio, cuando se trata de *cosenos* y *cotangentes*, d es la diferencia entre el logaritmo dado y el *próximo superior* de las tablas, siendo d y D *negativas*. En ambos casos, por tanto, el cociente $\frac{60'' \cdot d}{D}$ será positivo.

Si se manejan las tablas de Vázquez Queipo, se puede aprovechar la *parte proporcional* correspondiente a $1''$, es decir, el cociente $D : 60''$, que aparece en ellas.

En efecto: es fácil ver la equivalencia de estas dos expresiones

$$d \cdot \frac{60''}{D} \qquad \text{y} \qquad d : \frac{D}{60''}$$

por lo que podremos escribir, si designamos por p al cociente $\frac{D}{60''}$

$$h'' = \frac{60''}{D} \cdot d = d : \frac{D}{60''} = \frac{d}{p}$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA. — *Para hallar los segundos que deben añadirse al ángulo correspondiente al logaritmo tabular inferior* (senos y tangentes), *o superior al dado* (cosenos y cotangentes), *se divide la diferencia* d *por la parte proporcional a* 1″ *que corresponde al logaritmo tomado en las tablas.*

EJEMPLO 1.º — Hallar el menor valor de x en log sen $x = \bar{1}'970950$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{log dado} \ldots\ldots = \bar{1}'970950 \\ \text{log inferior } (69°\ 16') \ldots\ldots = \bar{1}'970922 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 28\end{array}\right\} \frac{28}{0'8} = 35''$$

$$x = 69°\ 16'\ 35''$$

EJEMPLO 2.º — Hallar el menor valor de x en log tg $x = \bar{1}'567410$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{log dado} \ldots\ldots = \bar{1}'567410 \\ \text{log inferior } (20°\ 16') \ldots\ldots = \bar{1}'567320 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 90\end{array}\right\} \frac{90}{6'47} = 13'',9$$

$$x = 20°\ 16'\ 13'',9$$

EJEMPLO 3.º — Hallar el menor valor de x en log cos $x = \bar{1}'971700$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{log superior } (20°\ 27') \ldots\ldots = \bar{1}'971729 \\ \text{log dado} \ldots\ldots = \bar{1}'971700 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 29\end{array}\right\} \frac{29}{0'78} = 37'',2$$

$$x = 20°\ 27'\ 37'',2$$

EJEMPLO 4.º — Hallar el menor valor de x en log cotg $x = \bar{1}'570000$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{log superior } (69°\ 37') \ldots\ldots = \bar{1}'570035 \\ \text{log dado} \ldots\ldots = \bar{1}'570000 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 35\end{array}\right\} \frac{35}{6'45} = 5'',4$$

$$x = 69°\ 37'\ 5'',4$$

TERCER CASO. — *El logaritmo dado no está en las tablas, pero pertenece a un arco inferior a* 4° *o superior a* 86°.

Supongamos que nos dan el logaritmo seno o tangente de un ángulo $a + h$ inferior a 4°. De las fórmulas [49], deducimos

$$\begin{array}{l}\log(a+h) = \log \text{sen}\,(a+h) - [\log \text{sen}\, a - \log a] \\ \log(a+h) + \log \text{tg}\,(a+h) - [\log \text{tg}\, a - \log a]\end{array} \qquad [50]$$

por lo cual, habrá que determinar las diferencias

$$d = [\log \operatorname{sen} a - \log a] \quad \text{y} \quad d = [\log \operatorname{tg} a - \log a]$$

para obtener $\log (a+h)$ y, consiguientemente, el número de segundos del ángulo buscado.

Como en los casos anteriores, *buscaremos el logaritmo seno o tangente inmediato inferior al propuesto, lo cual nos dará a conocer el ángulo* a; *tomaremos luego de la columna que corresponda la diferencia* d, *que se encuentra en las tablas, la restaremos del logaritmo seno o logaritmo tangente dados, y la diferencia será el logaritmo del ángulo* a+h *reducido a segundos; en las tablas de logaritmos de números, se buscará el antilogaritmo y lo reduciremos a grados, minutos y segundos* (1).

EJEMPLO 1.º — Hallar el ángulo cuyo logaritmo seno es $\bar{2}$'818245.

El inmediato inferior de las tablas es $\bar{2}$'817522, que pertenece a 3° 46′; la columna contigua de la derecha nos da

$$d = \bar{6}'685262 = [\log \text{ sen } 3° \ 46' - \log 3° \ 46']$$

luego, tendremos que

$$\log (a+h) = \bar{2}'818245 - \bar{6}'685262 = 4'132983$$

cuyo antilogaritmo es

$$13.582'',6 = a + h = 3° \ 46' \ 22'',6$$

EJEMPLO 2.º — Hallar el ángulo cuyo logaritmo tangente es $\bar{2}$'768040.

$$\log \text{ tg } 3° \ 21' = \bar{2}'767417$$

$$\log (a+h) = \bar{2}'768040 - \bar{6}'686070 = 4'081970$$

$$a + h = 12.077'',3 = 3° \ 21' \ 17'',3$$

Cuando se trate del logaritmo COSENO de un ángulo *inferior* a 4°, se aplica el método de las *partes proporcionales* del caso anterior, por ser pequeñas las diferencias de los logaritmos de dos ángulos consecutivos.

---

(1) Los grados y minutos se conocían ya por las tablas trigonométricas; lo que en realidad se halla son los *segundos* del ángulo.

EJEMPLO 3.° — Hallar el ángulo cuyo logaritmo coseno es $\bar{1}'999081$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{log superior } (3°\ 43') \ldots\ldots = \bar{1}'999086 \\ \text{log dado} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \bar{1}'999081 \\ \hline 5\end{array}\right\} \quad \frac{60 \times 5}{9} = 33'',3$$

$$x = 3°\ 43'\ 33'',3$$

En el caso de logaritmos COTANGENTES de ángulos inferiores a 4°, se hallan sus cologaritmos y éstos serán los logaritmos tangentes de los mismos ángulos; bastará luego proceder como en el ejemplo 2.°.

Se tiene, en efecto:

$$\operatorname{cotg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}; \qquad \log \operatorname{cotg} a = -\log \operatorname{tg} a = \operatorname{colog} \operatorname{tg} a$$

EJEMPLO 4.° — Hallar el ángulo cuyo logaritmo cotangente es 1'250364.

$$\operatorname{colog} 1'250364 = \bar{2}'749636 = \log \operatorname{tg} (a+h)$$

$$\log \operatorname{tg} 3°\ 12'' = \bar{2}'747479$$

$$\log (a+h) = \bar{2}'749636 - \bar{6}'686027 = 4'063609$$

$$a + h = 11.577'',3 = 3°\ 12'\ 57'',3$$

HALLAR UN ÁNGULO COMPRENDIDO ENTRE 86° y 90°:

a) *Por medio de un logaritmo seno.* Las diferencias son muy pequeñas, por lo que se pueden aplicar las *partes proporcionales.*

b) *Por medio de un logaritmo coseno, tangente o cotangente.* Se halla el ángulo complementario del pedido, haciendo uso de las fórmulas

$$\cos \alpha = \operatorname{sen} (90° - \alpha)$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} (90° - \alpha)$$

EJEMPLO 5.° — Hallar el ángulo cuyo logaritmo seno es $\bar{1}'999170$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{log inferior } (86°\ 27') \ldots\ldots = \bar{1}'999166 \\ \text{log dado} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \bar{1}'999170 \\ \hline 4\end{array}\right\} \quad \frac{60 \times 4}{8} = 30''$$

$$x = 86°\ 27'\ 30''$$

EJERCICIOS

Hallar el logaritmo de las siguientes razones trigonométricas:

466. sen 25° 15′ 20″
467. cos 22° 40′ 51″
468. sen 20° 46′ 44″
469. sen 44° 45′ 48″
470. tg 57° 5′ 13″
471. tg 72° 23′ 16″
472. cos 27° 38′ 48″
473. cos 9° 15′ 45″
474. cotg 47° 14′ 29″,2
475. cotg 10° 11′ 28″
476. cotg 34° 17′ 33″
477. sen 2° 45′ 50″
478. sen 1° 43′ 20″
479. cos 2° 43′ 25″
480. cos 0° 50′ 30″
481. tg 1° 40′ 20″
482. tg 3° 2′ 50″
483. cotg 1° 20′ 10″
484. cotg 2° 31′ 40″
485. sen 86° 21′ 20″
486. sen 89° 29′ 15″
487. cos 86° 45′ 10″
488. cos 88° 34′ 20″
489. tg 88° 23′ 10″
490. tg 89° 2′ 20″
491. cotg 88° 42′ 40″
492. cotg 86° 35′ 10″
493. sen 151° 13′ 16″

Calcular el menor valor de x *de cada una de las ecuaciones siguientes:*

494. log sen $x = \bar{1}'891013$
495. log sen $x = \bar{1}'485879$
496. log sen $x = \bar{1}'039960$
497. log tg $x = 0'856864$
498. log tg $x = \bar{1}'227926$
499. log tg $x = 0'551159$
500. log cos $x = \bar{1}'861380$
501. log cos $x = \bar{1}'939181$
502. log cos $x = \bar{1}'638294$
503. log cotg $x = 0'195734$
504. log cotg $x = 0'001817$
505. log cotg $x = \bar{1}'775908$
506. log sen $x = \bar{2}'655773$
507. log sen $x = \bar{2}'482082$
508. log tg $x = \bar{2}'776349$
509. log tg $x = \bar{2}'169906$
510. log cotg $x = 1'421010$
511. log cotg $x = 1'605915$
512. log cos $x = \bar{1}'999108$
513. log cos $x = \bar{1}'999926$
514. log sen $x = \bar{1}'999889$
515. log sen $x = \bar{1}'999962$
516. log tg $x = 1'391981$
517. log tg $x = 1'246145$
518. log cotg $x = \bar{2}'016004$
519. log cotg $x = \bar{2}'540054$
520. log cos $x = \bar{2}'679286$
521. log cos $x = \bar{2}'364963$

28. Resolución de triángulos rectángulos

215. Objeto de la Trigonometría. — El objeto de la Trigonometría es la resolución de triángulos. Resolver un triángulo es calcular tres de sus elementos, cuando se conocen los otros tres, ya que un triángulo queda determinado por tres de sus seis elementos (tres lados y tres ángulos). Entre los elementos conocidos, es necesario que figure por lo menos un lado. Tratándose de los triángulos rectángulos, hay un elemento que siempre conocemos: el ángulo recto.

En Trigonometría, es costumbre designar a los ángulos por las mayúsculas A, B, C, y a los respectivos lados opuestos por las minúsculas a, b, c. La letra A designa siempre en los triángulos rectángulos al ángulo recto.

216. Relaciones entre los elementos de un triángulo rectángulo. — En el triángulo rectángulo ABC de la figura 112, podemos ver las siguientes relaciones:

1.° *Fórmulas que relacionan los tres lados:*

En virtud del teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, se tiene:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(a+c)(a-c)}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}$$

2.° *Fórmula que relaciona los ángulos agudos:*

$$B + C = 90°$$

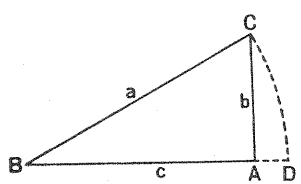


FIG. 112

3.° *Fórmulas que relacionan un cateto, la hipotenusa y un ángulo agudo.* — Por ser $B + C = 90°$, se puede escribir (núm. 181):

$$\text{sen } B = \cos C; \quad \cos B = \text{sen } C; \quad \text{tg } B = \text{cotg } C; \quad \text{cotg } B = \text{tg } C$$

Además, según la definición de seno y de coseno, será:

$$\text{sen } B = \frac{b}{a} = \cos C, \text{ de donde, } b = a \text{ sen } B = a \cos C \qquad [51]$$

$$\cos B = \frac{c}{a} = \text{sen } C, \text{ de donde, } c = a \text{ sen } C = a \cos B \qquad [52]$$

4.° *Fórmulas que relacionan los dos catetos y un ángulo agudo.* — En virtud de la definición de tangente y de cotangente, resulta:

$$\text{tg } B = \frac{b}{c} = \text{cotg } C, \quad \text{de donde,} \quad b = c \text{ tg } B = c \text{ cotg } C \qquad [53]$$

$$\text{cotg } B = \frac{c}{b} = \text{tg } C, \quad \text{de donde,} \quad c = b \text{ tg } C = b \text{ cotg } B \qquad [54]$$

Expresadas en lenguaje ordinario, las fórmulas anteriores, [51], [52], [53] y [54], nos dicen que:

Un cateto es igual a la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto, o por el coseno del contiguo.

Un cateto es igual, también, al otro cateto por la tangente del ángulo opuesto, o por la cotangente del contiguo.

217. Casos de resolución de triángulos rectángulos. — Distinguiremos cuatro casos, análogos a los de construcción estudiados en Geometría, es decir, cuando los elementos conocidos son:

1.° *La hipotenusa y un ángulo agudo.*
2.° *Un cateto y un ángulo agudo.*
3.° *La hipotenusa y un cateto.*
4.° *Los dos catetos.*

Al resolver un triángulo, expresaremos las incógnitas y el área, siempre que se pueda, solamente en función de los datos, para que cuando interese conocer sólo un cierto elemento, no haya necesidad de calcular previamente otros, con la consiguiente pérdida de tiempo. Aparte de que, apoyándonos en un elemento calculado, introducimos en las operaciones el error con que fue obtenido.

PRIMER CASO. — *Dada la hipotenusa y un ángulo agudo.*

Datos: a y B Incógnitas: b, c y C

Fórmulas:

$$C = 90° - B \qquad b = a \text{ sen } B \qquad c = a \cos B$$

$$\text{área, } A = \tfrac{1}{2} b c = \tfrac{1}{2} a^2 \text{ sen } B \cos B$$

y tomando logaritmos,

$$\log b = \log a + \log \operatorname{sen} B; \qquad \log c = \log a + \log \cos B$$
$$\log A = \operatorname{colog} 2 + 2 \log a + \log \operatorname{sen} B + \log \cos B$$

EJEMPLO. — Resolver un triángulo rectángulo en el que $a = 1.200$ m. y $B = 36°$.

Cálculo de C: $\quad 90° - 36° = 54°$

Cálculo de b:

$b = a \operatorname{sen} B = 1.200 \times \operatorname{sen} 36°$
$\log b = \log 1.200 + \log \operatorname{sen} 36°$
$\log 1.200 = 3'079181$
$\log \operatorname{sen} 36° = \bar{1}'769219$
$\log b = 2'848400$
$b = 705'34$ m.

Cálculo de c:

$c = a \cos B = 1.200 \times \cos 36°$
$\log c = \log 1.200 + \log \cos 36°$
$\log 1.200 = 3'079181$
$\log \cos 36° = \bar{1}'907958$
$\log c = 2'987139$
$c = 970'82$ m.

Como ejercicio, hállese el área en éste y en los restantes ejemplos.

SEGUNDO CASO. — *Dado un cateto y un ángulo agudo.*

Datos: b y B $\qquad$ Incógnitas: a, c y C

Fórmulas:

$$C = 90° - B \qquad a = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \qquad c = b \operatorname{cotg} B$$

$$A = \tfrac{1}{2} bc = \tfrac{1}{2} b^2 \operatorname{cotg} B$$

La hipotenusa a la hemos obtenido partiendo de la fórmula

$$b = a \operatorname{sen} B.$$

Fórmulas logarítmicas:

$$\log a = \log b + \operatorname{colog} \operatorname{sen} B; \qquad \log c = \log b + \log \operatorname{cotg} B$$
$$\log A = \operatorname{colog} 2 + 2 \log b + \log \operatorname{cotg} B$$

EJEMPLO. — Resolver un triángulo rectángulo en el que $b = 778'32$ metros y $B = 12° \ 5' \ 48''$.

$$C = 90° - 12° \ 5' \ 48'' = 77° \ 54' \ 12''$$
$$\log a = \log 778'32 + \operatorname{colog} \operatorname{sen} 12° \ 5' \ 48''$$
$$\log c = \log 778'32 + \log \operatorname{cotg} 12° \ 5' \ 48''$$

Cálculo de a:

$$\begin{aligned} \log\ 778'32 &= 2'891158 \\ \operatorname{colog}\ \operatorname{sen}\ 12°\ 5'\ 48'' &= 0'678690 \\ \log\ a &= 3'569848 \end{aligned}$$

$$a = 3.714'05 \text{ m.}$$

Cálculo de c:

$$\begin{aligned} \log\ 778'32 &= 2'891158 \\ \log\ \operatorname{cotg}\ 12°\ 5'\ 48'' &= 0'668934 \\ \log\ c &= 3'560092 \end{aligned}$$

$$c = 3.631'55 \text{ m.}$$

TERCER CASO. — *Dada la hipotenusa y un cateto.*

Datos: a y b Incógnitas: c, B y C

Fórmulas:

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} = \cos C \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}$$

$$A = \tfrac{1}{2} b c = \tfrac{1}{2} b \sqrt{(a+b)(a-b)}$$

Fórmulas logarítmicas:

$$\log \operatorname{sen} B = \log b + \operatorname{colog} a = \log \cos C$$

$$\log c = \frac{\log (a+b) + \log (a-b)}{2}$$

$$\log A = \operatorname{colog} 2 + \log b + \frac{\log (a+b) + \log (a-b)}{2}$$

EJEMPLO. — Resolver un triángulo rectángulo en el que $a = 624'50$ m. y $b = 172'46$ m.

$$\log \operatorname{sen} B = \log \cos C = \log 172'46 + \operatorname{colog} 624'50$$

$$\log c = \frac{\log (624'50+172'46) + \log (624'50-172'46)}{2}$$

Cálculo de B y C

$$\begin{aligned} \log\ 172'46 &= 2'236688 \\ \operatorname{colog}\ 624'50 &= \bar{3}'204468 \\ \log\ \operatorname{sen} B = \log\ \cos C &= \bar{1}'441156 \\ B &= 16°\ 1'\ 51'',6 \\ C &= 73°\ 58'\ 8'',4 \end{aligned}$$

Cálculo de c:

$$\begin{aligned} \log\ (624'50+172'46) &= 2'901436 \\ \log\ (624'50-172'46) &= 2'655176 \\ & \quad 5'556612 \\ \log\ c = 5'556612 : 2 &= 2'778301 \\ c &= 600'21 \text{ m.} \end{aligned}$$

CUARTO CASO. — *Dados los dos catetos.*

Datos: b y c Incógnitas: a, B, C

Fórmulas:

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} = \operatorname{cotg} C \qquad a = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \qquad A = \tfrac{1}{2} b c$$

El valor de a se deduce de ser $b = a \operatorname{sen} B$

Fórmulas logarítmicas:

$$\log \operatorname{tg} B = \log b + \operatorname{colog} c = \log \operatorname{cotg} C$$

$$\log a = \log b + \operatorname{colog} \operatorname{sen} B; \qquad \log A = \operatorname{colog} 2 + \log b + \log c$$

EJEMPLO. — Resolver un triángulo rectángulo en el que $b = 194'22$ m. y $c = 489'64$ m.

$$\log \operatorname{tg} B = \log \operatorname{cotg} C = 194'22 + \operatorname{colog} 489'64$$

$$\log a = \log 194'22 + \operatorname{colog} \operatorname{sen} B$$

Cálculo de B y C

$$\log 194'22 = 2'288294$$
$$\operatorname{colog} 489'64 = \bar{3}'310123$$
$$\log \operatorname{tg} B = \log \operatorname{cotg} C = \bar{1}'598417$$
$$B = 21° \ 38' \ 10''$$
$$C = 68° \ 21' \ 50''$$

Cálculo de a

$$\log 194'22 = 2'288294$$
$$\operatorname{colog} \operatorname{sen} 21° \ 38' \ 10'' = 0'433315$$
$$\log a = 2'721609$$
$$a = 526'75 \text{ m.}$$

218. Resolución de triángulos isósceles. — La altura de un triángulo isósceles lo divide en dos triángulos rectángulos iguales, por lo que la resolución de los triángulos isósceles se reduce a la de los triángulos rectángulos. He aquí los cuatro casos que pueden presentarse, correspondiéndose con los estudiados para los triángulos rectángulos:

1.° *Se dan un lado y un ángulo.*
2.° *Se dan la base y un ángulo.*
3.° *Se dan un lado y la base.*
4.° *Se dan la base y la altura.*

EJEMPLO. — Resolver un triángulo isósceles en el que la base mide 224'16 cm. y la altura 280'20 cm.

Sea el triángulo de la figura 113. De él conocemos la base, $b = AC = 224'16$ centímetros, y la altura, $h = 280'20$ centímetros.

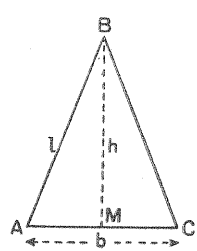


FIG 113

La mitad de la base y la altura constituyen los catetos del triángulo rectángulo mitad del isósceles; luego, se trata del cuarto caso de triángulos rectángulos. Tendremos:

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}B\right) = \frac{\frac{1}{2}b}{h} = \operatorname{cotg} A; \quad \tfrac{1}{2}b = l \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}B\right), \text{ es decir, } l = \frac{\frac{1}{2}b}{\operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}B\right)}$$

$$\log \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}B\right) = \log 112'08 + \operatorname{colog} 280'20 = \log \operatorname{cotg} A$$
$$\log l = \log 112'08 + \operatorname{colog} \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}B\right)$$

Cálculo de B y A

$$\begin{aligned} \log 112'08 &= 2'049528 \\ \operatorname{colog} 280'20 &= \bar{3}'552532 \\ \log \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}B\right) = \log \operatorname{cotg} A &= \bar{1}'602060 \\ \tfrac{1}{2}B &= 21° 48' 5'' \\ B &= 43° 36' 10'' \\ A &= 68° 11' 55'' \end{aligned}$$

Cálculo de l

$$\begin{aligned} \log 112'08 &= 2'049528 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} 21° 48' 5'' &= 0'430170 \\ \log l &= 2'479698 \\ l &= 301'78 \text{ cm.} \end{aligned}$$

219. Aplicación a los polígonos regulares. — Los radios y las apotemas dividen a un polígono regular en triángulos rectángulos iguales (fig. 114). Por consiguiente, si conocemos los elementos de uno de dichos triángulos, el polígono quedará determinado. Ahora bien: hay que tener en cuenta que no pueden darse arbitrariamente los elementos de los triángulos, ya que para que un triángulo rectángulo pueda formar polígonos regulares, es necesario que el ángulo en el centro sea una parte alícuota de 180°. Debido a esto, no puede caracterizarse al polígono dando como datos: el radio y la apotema, o el radio y el lado, o el lado y la apotema. Los casos que pueden presentarse son los tres siguientes, según que los elementos conocidos sean:

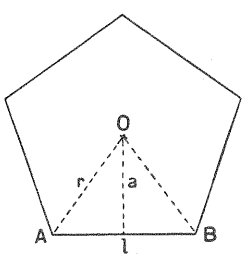


FIG. 114

1.° *El lado y el nombre del polígono.*
2.° *La apotema y el nombre del polígono.*
3.° *El radio y el nombre del polígono.*

Al conocer el nombre del polígono, deducimos el número n de lados, así como la medida del ángulo en el centro.

EJEMPLO. — Resolver un pentágono regular del que se conoce la apotema $a = 176'23$ metros.

Como el ángulo en el centro O (figura 114) es igual a $360 : 5 = 72°$, su mitad será $\frac{1}{2}O = 36°$, y, por tanto, el problema queda reducido a resolver un triángulo rectángulo del que se conoce un cateto y un ángulo agudo (SEGUNDO CASO).

Tendremos: $a = r \cos 36°$, es decir, $r = \dfrac{a}{\cos 36°}$; $\quad \frac{1}{2} l = a \operatorname{tg} 36°$

$$\log r = \log 176'23 + \operatorname{colog} \cos 36°$$

$$\log \left(\tfrac{1}{2} l\right) = \log 176'23 + \log \operatorname{tg} 36°$$

Cálculo de r

$$\begin{aligned} \log 176'23 &= 2'246080 \\ \operatorname{colog} \cos 36° &= 0'092042 \\ \log r &= 2'338122 \\ r &= 217'83 \text{ m.} \end{aligned}$$

Cálculo de l

$$\begin{aligned} \log 176'23 &= 2'246080 \\ \log \operatorname{tg} 36° &= 1'861261 \\ \log \left(\tfrac{1}{2} l\right) &= 2'107341 \\ \tfrac{1}{2} l &= 128'04 \\ l &= 256'08 \text{ m.} \end{aligned}$$

EJERCICIOS

Resolver los siguientes triángulos rectángulos, en los que nos dan:

522. $a = 54'25$; $B = 32° 25'$ **527.** $c = 34$; $B = 42° 25' 33''$
523. $b = 230$; $B = 62° 26' 20''$ **528.** $c = 0'0001689$; $b = 0'0004761$
524. $a = 62'50$; $b = 32$ **529.** $b = 617'57$; $a = 729'59$
525. $b = 122'40$; $c = 130$ **530.** $c = 89'32$; $B = 82° 6' 18''$
526. $c = 225$; $a = 350$ **531.** $a = 156'819$; $b = 99'464$

Resolver los siguientes triángulos isósceles (A *y* C *son los ángulos iguales;* b, *la base;* l, *cada uno de los lados iguales, y* h, *la altura):*

532. $A = 68° 57'$; $l = 350'94$ **534.** $l = 79'243$; $b = 106'63$
533. $C = 27° 8'$; $b = 3'0892$ **535.** $b = 143'20$; $h = 150'40$

536. Calcular el lado del pentágono regular inscrito en un círculo cuyo diámetro es 35 cm.

537. En una circunferencia de 12 cm. de radio se toma una cuerda de 13 cm. Averiguar el ángulo central que abarca dicha cuerda.

538. Resolver un decágono regular cuyo radio mide 6'4 m.

539. Calcular la base y la altura de un rectángulo, sabiendo que su diagonal mide 84'66 cm. y uno de los ángulos adyacentes a ella, 72° 48'.

540. Calcular los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 137'42 cm. y 96'567 centímetros.

541. Hállese la diagonal de un pentágono regular cuyo lado mide 632'57 m.

542. Si una cuerda de longitud igual a 413'68 m. subtiende un arco de 45° 37', ¿cuál será el radio de la circunferencia?

543. La longitud del lado de un octógono regular es 12 m. Hallar los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita.

544. La diagonal de un pentágono regular es 32'835 m. ¿Cuál es el radio de la circunferencia circunscrita?

545. Calcular los ángulos de un trapecio isósceles cuyas bases miden 830 m. y 512 m., y la altura 614 metros.

29. Fórmulas para la resolución de triángulos oblicuángulos

220. Teorema de los senos. — Sea el triángulo ABC (fig. 115) y llamemos h a la altura correspondiente al vértice C. Tendremos:

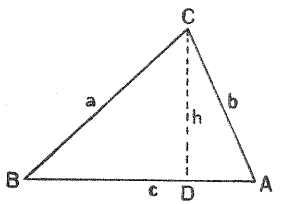


FIG. 115

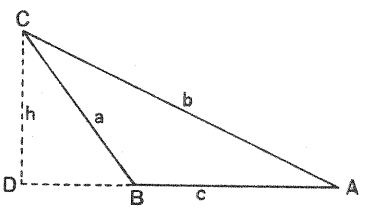


FIG. 116

En el tr. CDB: $h = a \operatorname{sen} B$
En el tr. CDA: $h = b \operatorname{sen} A$
} luego, $a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A$

y formando una proporción,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

Si trazamos la altura correspondiente al vértice A, se tendrá, por análogo razonamiento:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

luego, reuniendo ambas igualdades,

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}} \qquad [55]$$

Si el triángulo es obtusángulo (fig. 116), se verifica la misma proporcionalidad. En efecto:

En el tr. CDB: $h = a \operatorname{sen} CBD = a \operatorname{sen} B$, ya que $CBD + B = 180°$

En el tr. CDA: $h = b \operatorname{sen} A$

Luego, como antes, es $a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A$; tomando ahora otra altura, llegaríamos a la fórmula [55].

La proporcionalidad deducida es la expresión del llamado TEOREMA DE LOS SENOS, que podemos enunciar así: *los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.*

221. Radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo. — Vamos a determinar la constante de proporcionalidad entre los lados y los senos de los ángulos opuestos de que hemos hablado en el párrafo anterior.

Para ello, supongamos el triángulo ABC (fig. 117) y tracemos la circunferencia circunscrita. Por un vértice, el B, por ejemplo, tracemos el diámetro BA' y unamos A' con C. Hemos formado el triángulo BCA' que es rectángulo en C, ya que C es un ángulo inscrito en una semicircunferencia. Los dos triángulos ABC y $A'BC$ tienen el lado CB común, e iguales los ángulos A y A', opuestos a dicho lado.

Aplicando a estos dos triángulos el teorema de los senos, resulta:

$$\text{en } ABC: \quad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

$$\text{en } A'BC: \quad \frac{a}{\operatorname{sen} A'} = \frac{A'B}{\operatorname{sen} A'CB}$$

y reuniendo las dos igualdades,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{A'B}{\operatorname{sen} A'CB}$$

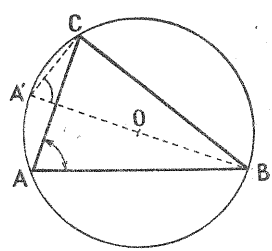


FIG. 117

pero $A'B = 2r$ (diámetro), y $\operatorname{sen} A'CB = \operatorname{sen} 90° = 1$; luego,

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2r} \qquad [56]$$

O sea, que: *la constante de proporcionalidad entre los lados de un triángulo y los senos de los ángulos opuestos, es igual al diámetro de la circunferencia circunscrita.*

De la fórmula anterior puede despejarse fácilmente el radio.

222. Teorema del coseno. — Sean de nuevo los triángulos ABC de las figuras 115 y 116. Sabemos por Geometría que, en un triángulo, *el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.*

Es decir: en el triángulo de la figura 115, se verifica que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot AD$$

pero, en el triángulo ACD, $AD = b \cos A$; luego, sustituyendo,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

Análogamente, se obtiene:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

Si se trata del lado opuesto a un ángulo *obtuso* (fig. 116), la Geometría nos dice que el cuadrado de dicho lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, *más* el duplo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él. Es decir:

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2c \cdot BD$$

pero, en el triángulo BCD, $BD = a \cos CBD = a \cdot (-\cos B) = -a \cos B$, ya que $CBD + B = 180°$; luego, sustituyendo,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

En definitiva, se tiene, cualquiera que sea el ángulo:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \end{aligned} \qquad [57]$$

expresión del llamado TEOREMA DEL COSENO, que se enuncia de este modo: *En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el duplo del producto de estos lados por el coseno del ángulo opuesto al primero.*

Nótese que, aunque el signo del último término en las fórmulas trigonométricas sea siempre menos, cuando se trata del lado opuesto a un ángulo obtuso, dicho signo se convierte en más, debido a que el coseno de un ángulo obtuso es siempre negativo.

223. Teorema de las tangentes. — Consideremos un triángulo cualquiera, el ABC, por ejemplo, de la figura 115. En virtud del teorema de los senos, tenemos que

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

y aplicando una propiedad de las proporciones,

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}$$

pero, según la fórmula [48],

$$\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{tg} \dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{A-B}{2}}$$

y sustituyendo en el primer miembro, resulta la siguiente fórmula, llamada *fórmula de Neper:*

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{A-B}{2}} \qquad [58]$$

expresión del llamado TEOREMA DE LAS TANGENTES, cuyo enunciado es el siguiente: *La suma de dos lados de un triángulo es a su diferencia, como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos es a la tangente de la semidiferencia de esos mismos ángulos.*

Si $a < b$, también será $A < B$, y la fórmula se transformará en esta otra:

$$\frac{b+a}{b-a} = \frac{\operatorname{tg} \dfrac{B+A}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{B-A}{2}}$$

224. Fórmulas de Briggs [1]. — Si en la fórmula

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

del teorema del coseno, despejamos $\cos A$, resulta

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad [59]$$

Por otra parte, del sistema

$$\begin{cases} 1 = \cos^2 \dfrac{A}{2} + \operatorname{sen}^2 \dfrac{A}{2} & \text{fórmula [6] aplicada a } \dfrac{A}{2} \\ \cos A = \cos^2 \dfrac{A}{2} - \operatorname{sen}^2 \dfrac{A}{2} & \text{fórmula [33] aplicada a } \dfrac{A}{2} \end{cases}$$

al restar, primero, y luego sumar m. a m., se deduce

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A \qquad \text{y} \qquad 2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos A$$

Sustituyendo ahora en estas fórmulas $\cos A$ por el valor antes hallado [59], resulta:

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} =$$

$$= \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

y también:

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} =$$

$$= \frac{(2bc + b^2 + c^2) - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

Ahora bien: si llamamos p al semiperímetro del triángulo, será

$$2p = a + b + c \quad \begin{cases} \text{restando } 2a: & 2p - 2a = a + b + c - 2a \\ \text{o sea:} & 2(p-a) = b + c - a \\ \text{restando } 2b: & 2(p-b) = a + c - b \\ \text{restando } 2c: & 2(p-c) = a + b - c \end{cases}$$

(1) Henry BRIGGS, matemático inglés (1556-1630).

y sustituyendo estos valores en los resultados anteriores, se obtiene:

$$2\,\text{sen}^2\frac{A}{2} = \frac{2(p-c)\cdot 2(p-b)}{2bc} = \frac{2(p-c)(p-b)}{bc}$$

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{2p\cdot 2(p-a)}{2bc} = \frac{2p(p-a)}{bc}$$

y despejando, resulta

$$\text{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad \text{y} \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \qquad [60]$$

Análogamente, se obtendría:

$$\text{sen}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \quad \text{y} \quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \qquad [61]$$

$$\text{sen}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \quad \text{y} \quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \qquad [62]$$

Finalmente, dividiendo cada seno por su correspondiente coseno, resulta:

$$\text{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}; \qquad \text{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\text{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \qquad [63]$$

Estas tres últimas fórmulas son las llamadas *fórmulas de Briggs*, las cuales permiten calcular los ángulos de un triángulo en función de los lados, con mucha mayor exactitud que las anteriores.

225. Área de un triángulo en función de sus lados: FÓRMULA DE HERÓN. — En el triángulo de la figura 115, se tiene:

$$\text{Área} = \tfrac{1}{2}c\cdot h = \tfrac{1}{2}bc\,\text{sen}\,A$$

fórmula que resulta fácil de aplicar cuando se conocen dos lados b y c y el ángulo comprendido A.

(1) HERÓN *de Alejandría*. Matemático griego de fines del siglo II a. de J. C.

Si se dan los tres lados, podemos sustituir en la fórmula anterior sen A, teniendo en cuenta que

$$\operatorname{sen} A = 2 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = 2 \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} =$$

$$= 2 \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}} = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

con lo que resulta:

$$\boxed{\text{Área} = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}} \qquad [64]$$

que es la llamada *fórmula de Herón.*

EJERCICIOS

546. Basándose en el teorema de los senos, calcular el ángulo A de un triángulo ABC, del que se conocen $a = 10$, $b = 8$ y $B = 49° 27' 30''$.

Calcular el radio de la circunferencia circunscrita a los triángulos siguientes, de los que se conocen:

547. $a = 245$ m., $A = 45°$

548. $b = 125'4$ m., $A = 90°$, $C = 48°$

549. $b = c = 323$ m., $h_a = 275$ m.

550. Calcular el lado c de un triángulo, en el que $a = 12$ m., $b = 15$ m. y $A = 30°$.

551. Sabiendo que los lados de un triángulo son $a = 10$, $b = 8$ y $c = 4$, hallar los tres ángulos basándose en el teorema del coseno.

Dados los tres lados del ejercicio anterior, hallar:

552. El ángulo A por una de las fórmulas [60].

553. El ángulo B por una de las fórmulas [61].

554. El ángulo C por la fórmula correspondiente del grupo [63].

555. El área.

556. Calcular el área de un triángulo en el que $a = 20'17$ m., $b = 18'74$ m. y $c = 29'61$ m. (Tómense logaritmos en la fórmula de Herón).

557. Comprobar la fórmula $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, valiéndose de las fórmulas [60].

30. Resolución de triángulos oblicuángulos

226. Casos de resolución de triángulos oblicuángulos. — Cuatro son los casos que pueden presentarse en la resolución de triángulos oblicuángulos, análogos a los de construcción que estudia la Geometría.

1.° *Dados un lado y dos ángulos.*
2.° *Dados dos lados y el ángulo comprendido.*
3.° *Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.*
4.° *Dados los tres lados.*

227. PRIMER CASO: **Se conocen un lado y dos ángulos.**

Datos: a, B y C Incógnitas: A, b y c

Cálculo de A: Se resta de 180° la suma de $B + C$:

$$A = 180° - (B+C)$$

Cálculo de b *y* c. Conocidos los tres ángulos y el lado a, las proporciones

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \quad \text{y} \quad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

dan los valores de b y c:

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} \qquad c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

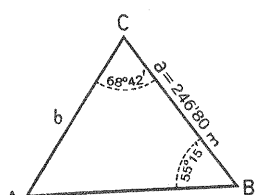


FIG. 118

Área: El área del triángulo vendrá expresada (fig. 118) por

$$A = \tfrac{1}{2} c \cdot h = \tfrac{1}{2} c\, a \operatorname{sen} B$$

y sustituyendo c por su valor, resulta

$$A = \tfrac{1}{2} \frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

Discusión. — El problema es posible siempre que $B + C < 180°$.

EJEMPLO. — Resolver un triángulo en el que $a = 246'80$ m., $B = 55° 15'$ y $C = 68° 42'$ (fig. 118).

$$A = 180° - (B + C) = 180° - (55° 15' + 68° 42') = 56° 3'$$

Cálculo de b:

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} = \frac{246'80 \times \operatorname{sen} 55° 15'}{\operatorname{sen} 56° 3'}$$

Tomando logaritmos, se tiene:

log 246'80 ..... = 2'392345
log sen 55° 15' .. = $\bar{1}$'914685
colog sen 56° 3' = 0'081170
log b = 2'388200

b = 244'46 metros

Cálculo de c:

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \frac{246'80 \times \operatorname{sen} 68° 42'}{\operatorname{sen} 56° 3'}$$

Tomando logaritmos, se tiene:

log 246'80 ..... = 2'392345
log sen 68° 42' .. = $\bar{1}$'969272
colog sen 56° 3' = 0'081170
log c = 2'442787

c = 277'20 metros

228. SEGUNDO CASO: **Se conocen dos lados y el ángulo que forman.**

Datos: a, b y C Incógnitas: A, B y c

Cálculo de A *y* B: Ya que conocemos la suma

$$A + B = 180° - C = m$$

si logramos hallar la diferencia $A - B$, formaremos un sistema de dos ecuaciones que nos dará A y B.

De la fórmula de Neper [58], se deduce:

$$\operatorname{tg} \frac{A - B}{2} = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{tg} \frac{A + B}{2}$$

Supongamos $A - B = n$, y formemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} A + B &= m \\ A - B &= n \end{aligned}\right\} \text{ de donde, } A = \frac{m + n}{2} \text{ y } B = \frac{m - n}{2}$$

Cálculo de c: El lado c se calcula a partir de la proporción

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \quad \text{que da} \quad c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

Área: Si, por ejemplo, tomamos el lado a por base, tendremos:

$$A = \tfrac{1}{2} \cdot ah = \tfrac{1}{2} ab \operatorname{sen} C$$

Discusión. — El problema es posible siempre que $C < 180°$.

EJEMPLO. — Resolver un triángulo en el que $a = 1.224$ m., $b = 620'50$ m., y $C = 62° 23' 45''$ (fig. 119).

Cálculo de A y B:

$$A + B = 180° - 62° 23' 45'' = 117° 36' 15'' = m \qquad [a]$$

$$\text{tg } \tfrac{1}{2}(A-B) = \text{tg } \tfrac{1}{2}(A+B)\,\frac{a-b}{a+b} = \text{tg } 58° 48' 7'',5 \times \frac{603'50}{1844'50}$$

Tomando logaritmos, resulta:

$$\begin{aligned} &\log \text{tg } 58° 48' 7'',5 = 0'217835 \\ &\log 603'50 \ldots\ldots\ldots = 2'780677 \\ &\text{colog } 1844'50 \ldots\ldots = \bar{4}'734121 \\ &\log \text{tg } \tfrac{1}{2}(A-B) = \bar{1}'732633 \end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}(A-B) = 28° 22' 56''$$

$$A - B = 56° 45' 52'' = n \qquad [b]$$

De [a] y [b] se deduce:

$$A = \frac{m+n}{2} = \frac{117° 36' 15'' + 56° 45' 52''}{2} = 87° 11' 3'',5$$

$$B = \frac{m-n}{2} = \frac{117° 36' 15'' - 56° 45' 52''}{2} = 30° 25' 11'',5$$

Cálculo de c:

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \frac{1.224 \times \operatorname{sen} 62° 23' 45''}{\operatorname{sen} 87° 11' 3'',5}$$

$$\begin{aligned} &\log 1.224 \ldots\ldots\ldots = 3'087781 \\ &\log \operatorname{sen} 62° 23' 45'' \ldots = \bar{1}'947517 \\ &\text{colog sen } 87° 11' 3'',5 = 0'000524 \\ &\log c = 3'035822 \\ &c = 1.085'98 \text{ metros.} \end{aligned}$$

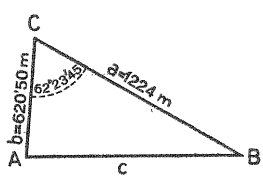


FIG. 122

229. TERCER CASO: **Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.** — Este es el llamado *caso dudoso* de los triángulos oblicuángulos, ya que puede haber en él una solución, dos o ninguna.

Datos: a, b y A Incógnitas: B, C y c

Cálculo de B: De $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B}$ se deduce $\operatorname{sen} B = \dfrac{b \operatorname{sen} A}{a}$

Discusión. — Comparando el dividendo del segundo miembro de esta fórmula con el divisor, vemos que pueden presentarse tres casos:

I. $b \operatorname{sen} A > a$. Entonces resulta: $\operatorname{sen} B > 1$. El problema es imposible, pues el seno de un ángulo no puede ser mayor que la unidad.

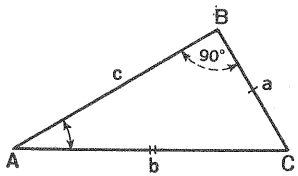


FIG. 120

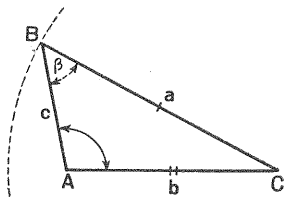


FIG. 121

II. b sen $A = a$. Resulta: sen $B = 1$, y el ángulo es recto. Para que haya solución en este caso, es necesario que el ángulo conocido A sea *agudo* (figura 120).

III. b sen $A < a$. Se tiene entonces: sen $B < 1$. Al valor de sen B corresponden dos ángulos, uno agudo β y otro obtuso $180° - \beta$.

1) Si A es *recto* u *obtuso*, B ha de ser *agudo*, admitiendo únicamente el valor β; y para que haya solución ha de ser $a > b$ (fig. 121), puesto que a mayor ángulo ha de oponerse mayor lado.

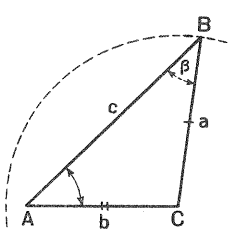
2) Si A es agudo, supondremos, sucesivamente:

$$a > b; \qquad a = b; \qquad a < b.$$

Si $a > b$, resulta $A > B$ (fig. 122). Siendo A agudo, lo es también B que es menor que A, y por tanto, hay una sola solución, $B = \beta$.

Si $a = b$, resulta $A = B$ (fig. 123). Solución única, que da un triángulo isósceles.

Si $a < b$, resulta $A < B'$ (fig. 124). Siendo agudo el ángulo A, el B, que es mayor que A, puede ser agudo u obtuso, admitiendo los valores β y $180 - \beta$. La fig. 124 muestra las dos soluciones, $AB'C$ y $AB''C$.



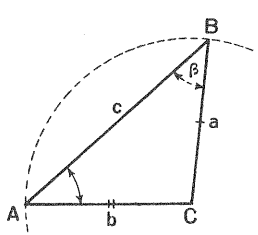


FIG 123

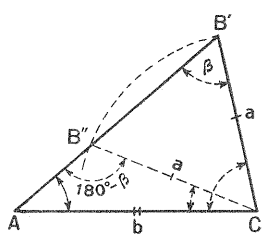


FIG. 124

I. $b \operatorname{sen} A > a$. No hay solución.

II. $b \operatorname{sen} A = a$. Una solución, si $A < 90°$. Entonces (fig. 120): $\beta = 90°$

III. $b \operatorname{sen} A < a$ { 1) $A \gtreqless 90°$. Si $a > b$, hay una solución (fig. 121): $B = \beta$
2) $A < 90°$ { $a > b$. Una solución (fig. 122): $B = \beta$
$a = b$. Una solución (fig. 123): $B = \beta = A$
$a < b$. Dos soluciones (fig. 124): $B' = \beta$ y $B'' = 180 - \beta$

Cálculo de C. Si hay solución, el ángulo C tendrá el primero de los valores siguientes o ambos:

$$C' = 180° - (A + \beta)$$
$$C'' = 180° - (A + 180 - \beta) = \beta - A$$

Cálculo de c: De $\dfrac{c}{\operatorname{sen} C} = \dfrac{a}{\operatorname{sen} A}$ se deduce $c = \dfrac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$

fórmula esta última que admitirá uno o dos valores, lo mismo que C.

$$\text{Área} = \tfrac{1}{2} b \cdot h = \tfrac{1}{2} b \cdot c \operatorname{sen} A = \tfrac{1}{2} b \cdot \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \cdot \operatorname{sen} A = \tfrac{1}{2} ab \operatorname{sen} C$$

EJEMPLO. — Resolver un triángulo en el que $a = 642'87$ m., $b = 720$ m., y $A = 56° 12' 33''$.

El seno de A es 0'83107; multiplicado por 720, da 598'36.

Se tiene, pues: $b \operatorname{sen} A < a$, $A < 90$ y $a < b$. El problema tiene, por tanto, dos soluciones.

Cálculo de B y de C

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{720 \times \operatorname{sen} 56° 12' 33''}{642'87}$$

log 720 ..... = 2'857332
log sen 56° 12' 33" = $\bar{1}$'919639
colog 642'87 ..... = $\bar{3}$'191877
log sen B = $\bar{1}$'968848

$$B' = \beta = 68° 33' 25'',2$$
$$B'' = 180° - \beta = 111° 26' 34'',8$$

$$C' = 180° - (A + \beta) = 180° - (56° 12' 33'' + 68° 33' 25'',2) = 55° 14' 1'',8$$
$$C'' = \beta - A = 68° 33' 25'',2 - 56° 12' 33'' = 12° 20' 52'',2$$

Cálculo de los valores de c

$$c' = \frac{a \operatorname{sen} C'}{\operatorname{sen} A}$$

$$c' = \frac{642'87 \times \operatorname{sen} 55° 14' 1'',8}{\operatorname{sen} 56° 12' 33''}$$

$\log 642'87 = \ldots\ldots\ldots\ldots \bar{2}'808123$
$\log \operatorname{sen} 55° 14' 1'',8 = \bar{1}'914601$
$\operatorname{colog} \operatorname{sen} 56° 12' 33'' = 0'080361$
$\log c' = \bar{2}'803085$
$c' = 635'45$ metros

$$c'' = \frac{a \operatorname{sen} C''}{\operatorname{sen} A}$$

$$c'' = \frac{642'87 \times \operatorname{sen} 12° 20' 52'',2}{\operatorname{sen} 56° 12' 33''}$$

$\log 642'87 = \ldots\ldots\ldots\ldots \bar{2}'808123$
$\log \operatorname{sen} 12° 20' 52'',2 = \bar{1}'330100$
$\operatorname{colog} \operatorname{sen} 56° 12' 33'' = 0'080361$
$\log c'' = \bar{2}'218584$
$c'' = 165'42$ metros

230. CUARTO CASO: **Se conocen los tres lados.** — Este caso lo resolveremos aplicando las fórmulas de Briggs [63].

El área viene dada por la fórmula de Herón [64].

Discusión. — Para que el problema sea posible, es necesario que a, b, c, sean tales que para

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

den valores reales, finitos y distintos de cero. Para ello, las cantidades subradicales de las fórmulas de Briggs deben ser *positivas*. Por ejemplo, ha de ser

$$\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)} > 0$$

Ahora bien: esto solamente puede ocurrir en uno de estos tres casos:

1.° Si los cuatro factores son negativos.
2.° Si dos factores son positivos y los otros dos negativos.
3.° Si los cuatro factores son positivos.

La *primera* hipótesis es inadmisible, porque p, el semiperímetro, es esencialmente positivo.

La *segunda*, tampoco puede darse, pues si fuese, por ejemplo,

$$p - b < 0 \qquad \text{y} \qquad p - c < 0$$

sumando miembro a miembro, resultaría

$$2p - b - c = a < 0$$

lo cual es imposible.

La *tercera* hipótesis es, pues, la única admisible; en cuyo caso,

$$\begin{array}{l} p > 0 \\ p - a > 0 \\ p - b > 0 \\ p - c > 0 \end{array} \quad \text{es decir} \quad \begin{array}{ll} a < b + c & b > a - c \\ b < c + a & c > b - a \\ c < a + b & a > c - b \end{array}$$

o sea, que *cada uno de los lados ha de ser menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.* Esta es, precisamente, la condición que deben reunir tres segmentos rectilíneos para que puedan formar triángulo, como se estudió en Geometría.

EJEMPLO. — Resolver un triángulo en el que a = 125'40 m., b = 332'24 m., y c = 256'85 m. (figura 125).

Según lo convenido (núm. 224), se tiene:

$$2p = 125'40 + 332'24 + 256'85 = 714'49, \text{ de donde, } p = 357'245$$

Cálculo de A:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(357'245 - 332'24)\,(357'245 - 256'85)}{357'245\,(357'245 - 125'40)}} = \sqrt{\frac{25'005 \times 100'395}{357'245 \times 231'845}}$$

Tomando logaritmos, se tiene:

$$\begin{array}{lr} \log 25'005 = & 1'398027 \\ \log 100'395 = & 2'001712 \\ \operatorname{colog} 357'245 = & \bar{3}'447034 \\ \operatorname{colog} 231'845 = & \bar{3}'634802 \\ & \bar{2}'481575 \end{array}$$

$$\bar{2}'481575 : 2 = \bar{1}'2407875$$

$$\tfrac{1}{2} A = 9^\circ\ 52'\ 33'',4$$
$$A = 19^\circ\ 45'\ 6'',8$$

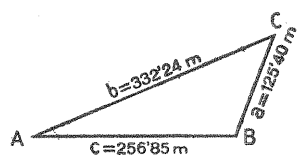


FIG. 125

Los otros dos ángulos se calculan de igual modo:

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B = \log \sqrt{\frac{(357'245 - 125'40)\,(357'245 - 256'85)}{357'245\,(357'245 - 332'24)}} = 0'2079585$$

$$\tfrac{1}{2} B = 58^\circ\ 13'\ 18'',4$$
$$B = 116^\circ\ 26'\ 36'',8$$

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \log \sqrt{\frac{(357'245 - 125'40)\,(357'245 - 332'24)}{357'245\,(357'245 - 256'85)}} = \bar{1}'6042735$$

$$\tfrac{1}{2} C = 21^\circ\ 54'\ 18'',3$$
$$C = 43^\circ\ 48'\ 36'',6$$

EJERCICIOS

Resolver los triángulos siguientes:

558. $a = 254$ metros, $B = 36° 30'$, $C = 58° 45'$

559. $a = 117'80$ m., $B = 32° 57'$, $C = 123°$

560. $a = 1024'80$ m., $B = 59° 48' 36''$, $C = 41° 32' 16''$

561. $b = 0'6708$ m., $A = 26° 10' 45''$, $C = 44° 35' 12''$

562. $c = 0'93109$ m., $A = 15° 34' 9''$, $C = 123° 29' 46''$

563. $a = 3123'20$ m., $b = 201'24$ m., $C = 56° 32' 5''$

564. $a = 114'40$ m., $b = 105'30$ m., $C = 54° 18'$

565. $a = 6024'80$ m., $b = 418'60$ m., $C = 78° 42' 10''$

566. $b = 4'102$ m., $c = 4'549$ m., $A = 62° 9' 38''$

567. $a = 7'48$ m., $c = 12'409$ m., $B = 83° 26' 52''$

568. $a = 910'25$ m., $b = 1024'80$ m., $A = 61° 18' 27''$

569. $a = 570'40$ m., $b = 436'25$ m., $A = 97° 54' 30''$

570. $a = 624'70$ m., $b = 527'62$ m., $A = 35° 48'$

571. $b = 4'521$ m., $c = 5'03$ m., $B = 40° 32' 7''$

572. $a = 0'32163$ m., $c = 0'27083$ m., $C = 52° 24' 16''$

573. $a = 37'50$ m., $b = 46$ m., $c = 53'50$ m.

574. $a = 2593'80$ m., $b = 3210'20$ m., $c = 3986'90$ m.

575. $a = 0'0291$ m., $b = 0'0184$ m., $c = 0'0358$ m.

576. $a = 187'422$ m., $b = 236'721$ m., $c = 199'315$ m.

577. Un lado de un paralelogramo mide 56 cm., y los ángulos formados por este lado y las diagonales son 31° 14' y 45° 37'. Calcular los lados del paralelogramo.

578. Las bases de un trapecio miden 231 m. y 472 m., respectivamente, y los lados no paralelos 239 m. y 358 m. Hallar el área del trapecio y el valor de sus ángulos.

579. Calcular el valor del arco que subtiende una cuerda de longitud igual a $\frac{3}{4}$ del diámetro.

580. Los lados AB, BC y DA de un campo cuadrangular $ABCD$ miden 37, 63 y 20 metros, respectivamente, y las diagonales AC y BD, 75 y 42 m., respectivamente. Calcular el área de dicho campo.

581. El radio de una circunferencia mide 254'8 m. Calcular el ángulo que formarán las tangentes a dicha circunferencia, trazadas por los extremos de una cuerda de longitud igual a 360'9 metros.

31. Aplicaciones prácticas de la Trigonometría

231. Medición de alturas y distancias. — La medición de alturas y distancias, es operación que resulta a menudo difícil y, a veces, imposible. No sucede lo mismo cuando se trata de ángulos, ya que su medida se logra con facilidad y exactitud, merced a aparatos especiales, como el grafómetro (fig. 126), que sirve para medir ángulos horizontales, y el teodolito (fig. 127), que mide al mismo tiempo ángulos horizontales y verticales.

Resulta, por tanto, muy útil la determinación indirecta de distancias basándose en la resolución de triángulos cuyo estudio acabamos de hacer. De ahí la gran importancia que la Trigonometría tiene en *Topografía, Agrimensura, Astronomía,* etc.

Resolveremos a continuación algunos problemas sencillos.

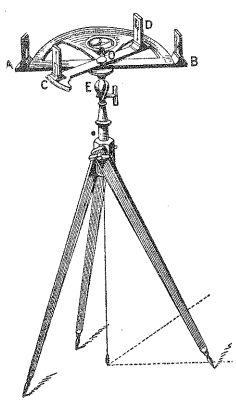


FIG. 126. GRAFÓMETRO

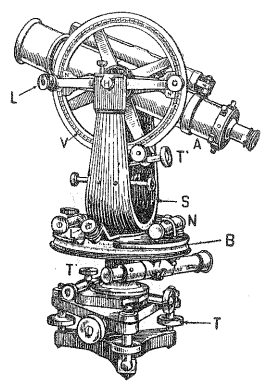


FIG. 127. TEODOLITO

232. Determinación de la altura de un punto de pie accesible. — Sea por ejemplo, la torre de la figura 128 cuya altura h queremos hallar.

A partir del pie A, se mide sobre el terreno una base horizontal $AB = c$. Después, con el teodolito colocado en B, se mide el ángulo α que forma la horizontal AB con la visual BC. En el triángulo rectángulo ABC, se tiene:

$$b = c \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

o bien, si se opera con logaritmos:

$$\log b = \log c + \log \operatorname{tg} \alpha$$

Para obtener h, queda únicamente sumar la altura del teodolito al valor hallado para b.

APLICACIÓN. — Hallar la altura de la torre representada en la figura 128, suponiendo que $c = 30$ m., $\alpha = 26° 14'$ y la altura del teodolito es 1'20 metros. Usando sólo tablas trigonométricas naturales, tendríamos:

$$b = 30 \cdot \operatorname{tg} 26° 14' = 30 \times 0'49278 = 14'78; \quad h = 14'78 + 1'20 = 15'98 \text{ m.}$$

Operando con logaritmos:

$$\log b = \log 30 + \log \operatorname{tg} 26° 14' = 1'477121 + \bar{1}'692656 = 1'169777$$

$$b = 14'781; \qquad h = 14'781 + 1'20 = 15'981 \text{ m.}$$

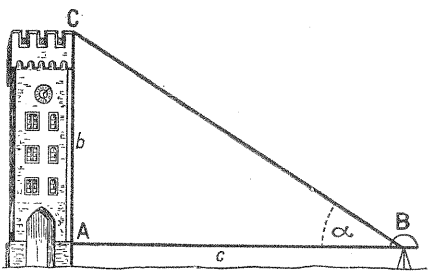


FIG. 128

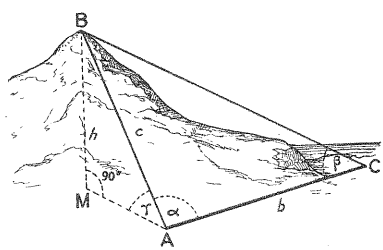


FIG. 129

233. Cálculo de la altura de un punto de pie inaccesible. — Consideremos, por ejemplo, la altura h de una montaña (fig. 129).

Sobre el llano se elije arbitrariamente una base $b = AC$ y se miden con el teodolito los ángulos α y β que forma dicha base con las visuales AB y CB. Con estos datos podemos calcular el lado $c = AB$ del triángulo ABC. Recordando el teorema de los senos, y observando que $(\alpha+\beta) + B = 180°$, resulta, en efecto:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{b}{\operatorname{sen} (\alpha+\beta)} \quad \text{de donde} \quad c = \frac{b \cdot \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} (\alpha+\beta)}$$

Conociendo ahora la hipotenusa c del triángulo rectángulo AMB, bastará medir con el teodolito el ángulo γ que dicha hipotenusa forma con la horizontal AM, y tendremos que

$$h = c \cdot \operatorname{sen} \gamma = \frac{b \cdot \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} (\alpha+\beta)}$$

o bien, si se opera con logaritmos,

$$\log h = \log b + \log \operatorname{sen} \beta + \log \operatorname{sen} \gamma + \operatorname{colog} \operatorname{sen} (\alpha + \beta)$$

Este procedimiento suele emplearse cuando se quiere calcular la altura alcanzada por un avión. Basta dirigir hacia él visuales desde dos teodolitos situados en los extremos de una base de longitud fija.

APLICACIÓN. — Calcular la altura de la montaña que representa la figura 129, suponiendo que $b = 500$ m., $\alpha = 72° \ 18' \ 15''$, $\beta = 60° \ 32' \ 27''$ y $\gamma = 62° \ 5' \ 11''$.

Tendremos:

$$B = 180° - (72° \ 18' \ 15'' + 60° \ 32' \ 27'') = 47° \ 9' \ 18''; \quad \operatorname{sen} (\alpha + \beta) = \operatorname{sen} B$$

$$h = \frac{500 \cdot \operatorname{sen} 60° \ 32' \ 27'' \cdot \operatorname{sen} 62° \ 5' \ 11''}{\operatorname{sen} 47° \ 9' \ 18''}$$

$$\log h = \log 500 + \log \operatorname{sen} 60° \ 32' \ 27'' + \log \operatorname{sen} 62° \ 5' \ 11'' + \operatorname{colog} \operatorname{sen} 47° \ 9' \ 18''$$

$$\begin{aligned} \log 500 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 2'698970 \\ \log \operatorname{sen} 60° \ 32' \ 27'' \ \ldots\ldots\ldots\ldots &= \bar{1}'939872 \\ \log \operatorname{sen} 62° \ 5' \ 11'' \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= \bar{1}'946282 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} 47° \ 9' \ 18'' \ \ldots\ldots\ldots\ldots &= 0'134780 \\ \log h &= 2'719904 \\ h &= 524'69 \text{ metros} \end{aligned}$$

234. Cálculo de la distancia entre dos puntos, uno de los cuales es inaccesible. — Supongamos que se trata de hallar la distancia $x = AB$, entre un punto A, accesible, y otro B, inaccesible (fig. 130).

Sobre el terreno se elige arbitrariamente una base $b = AC$. Luego, con el teodolito, se miden los ángulos α y β, dirigiendo visuales al punto B, desde A y C, respectivamente. El problema queda entonces reducido a hallar el lado x en el triángulo ABC, del que se conocen un lado y dos ángulos (1.er caso de oblicuángulos).

El teorema de los senos da

$$\frac{x}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{b}{\operatorname{sen} (\alpha + \beta)} \quad \text{ya que} \quad B + (\alpha + \beta) = 180°$$

luego,

$$x = \frac{b \cdot \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} (\alpha + \beta)}$$

y tomando logaritmos,

$$\log x = \log b + \log \operatorname{sen} \beta + \operatorname{colog} \operatorname{sen} (\alpha + \beta)$$

APLICACIÓN. — Calcular la distancia x entre el punto A, accesible, y el punto B, inaccesible, de la figura 130, suponiendo que $b = 200$ m., $\alpha = 61° 28' 19''$ y $\beta = 54° 53' 48''$.

Tendremos:

$$B = 180° - (61° 28' 19'' + 54° 53' 48'') = 63° 37' 53''; \qquad \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} B$$

$$x = \frac{200 \cdot \operatorname{sen} 54° 53' 48''}{\operatorname{sen} 63° 37' 53''}$$

$$\log x = \log 200 + \log \operatorname{sen} 54° 53' 48'' + \operatorname{colog} \operatorname{sen} 63° 37' 53''$$

$$\begin{aligned} \log 200 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 2'301030 \\ \log \operatorname{sen} 54° 53' 48'' \ \ldots\ldots\ldots\ldots &= \overline{1}'912816 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} 63° 37' 53'' \ \ldots\ldots\ldots\ldots &= 0'047714 \\ \log x &= 2'261560 \\ x &= 182'625 \text{ metros} \end{aligned}$$

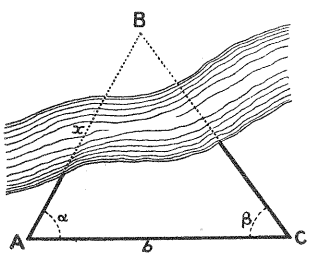


FIG. 130

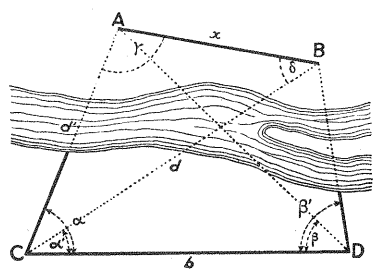


FIG. 131

235. Cálculo de la distancia entre dos puntos inaccesibles. — Supongamos, por ejemplo, que se quiere hallar la distancia x entre dos puntos A y B (fig. 131), inaccesibles a causa del río que se interpone entre ellos y el observador, situado en C.

Como en los casos anteriores, se comienza por elegir arbitrariamente una base $b = CD$, y desde los extremos se dirigen con el teodolito sendas visuales a los puntos A y B. De entre los triángulos imaginarios que se han formado, vamos a considerar los tres siguientes: el ACD, el BCD y el ABC.

En el triángulo ACD $\left\{\begin{array}{l} b \text{ es conocido} \\ \alpha \text{ lo da el teodolito} \\ \beta \text{ lo da el teodolito} \end{array}\right\}$ $d' = \dfrac{b \cdot \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$

En el triángulo BCD $\left\{\begin{array}{l} b \text{ es conocido} \\ \alpha' \text{ lo da el teodolito} \\ \beta' \text{ lo da el teodolito} \end{array}\right\}$ $d = \dfrac{b \cdot \operatorname{sen} \beta'}{\operatorname{sen} (\alpha' + \beta')}$

En el triángulo ABC $\left\{\begin{array}{l} d \text{ se ha calculado} \\ d' \text{ se ha calculado} \\ \text{áng. } ACB = \alpha - \alpha' \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} \delta, \text{ 2.° caso oblicuángulos} \\ x = \dfrac{d' \cdot \operatorname{sen} (\alpha - \alpha')}{\operatorname{sen} \delta} \end{array}\right.$

Este problema, resuelto primeramente por Snellius [1], es el fundamento del *método* para medir distancias llamado *de triangulación,* que consiste en llegar de un extremo a otro de la distancia que quiere medirse mediante una cadena de triángulos, de los cuales se miden cuidadosamente los ángulos, así como uno de los lados del primero denominado *base de la triangulación.*

236. Ecuaciones trigonométricas. — *Se llaman así las igualdades entre las razones goniométricas de ciertos ángulos que sólo se verifican para valores particulares de dichos ángulos.*

No deben confundirse las ecuaciones trigonométricas con las *identidades trigonométricas.* Éstas se verifican para cualquier valor del ángulo desconocido. Por ejemplo, $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ es una identidad trigonométrica.

Resolver una ecuación trigonométrica es buscar los valores de los ángulos que la satisfacen. Puede considerarse resuelta la ecuación cuando se ha llegado a las siguientes formas:

$$\operatorname{sen} x = m \qquad \cos x = m \qquad \operatorname{tg} x = m \qquad [1]$$

o, más generalmente, a las formas:

$$\operatorname{sen} ax = m \qquad \cos ax = m \qquad \operatorname{tg} ax = m \qquad [2]$$

ya que, entonces, sabemos calcular todos los valores del ángulo x que verifican estas igualdades.

No existen reglas generales para llevar una ecuación trigonométrica a la forma [1] o [2], pero son de gran utilidad las siguientes indicaciones:

1.ª *Expresar todas las razones goniométricas que intervengan en función de una sola.*

2.ª *Transformar las sumas en productos* (números 208, 209 y 210).

(1) SNELLIUS (1591-1626), matemático holandés, nacido en Leyden. Descubrió, además de la triangulación, la relación constante entre el seno del ángulo de incidencia y el de refracción (ley de Snellius, de la refracción).

EJEMPLO 1.º — *Resolver la ecuación:* $\cos^2 x - 3\,\text{sen}^2 x = 0$.

De $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ se deduce $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$

Sustituyendo en la ecuación dada, se tiene:

$$1 - \text{sen}^2 x - 3\,\text{sen}^2 x = 0; \qquad 1 - 4\,\text{sen}^2 x = 0; \qquad \text{sen } x = \pm\tfrac{1}{2}$$

$$x_1 = \mathbf{30^\circ} + \mathbf{n\,360^\circ}$$

$$x_2 = 150^\circ + n\,360^\circ = 180^\circ - 30^\circ + n\,360^\circ = \mathbf{(2n+1)\,180^\circ - 30^\circ}$$

$$x_3 = 210^\circ + n\,360^\circ = 180^\circ + 30^\circ + n\,360^\circ = \mathbf{(2n+1)\,180^\circ + 30^\circ}$$

$$x_4 = -30^\circ + n\,360^\circ = \mathbf{n\,360^\circ - 30^\circ}$$

EJEMPLO 2.º — *Resolver la ecuación:* $2\,\text{sen } x + 3\cos x = 3$.

Recordemos [30] y [31], que

$$\text{sen } x = \frac{2\,\text{tg}\,\frac{x}{2}}{1 + \text{tg}^2\,\frac{x}{2}} \qquad \text{y} \qquad \cos x = \frac{1 - \text{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1 + \text{tg}^2\,\frac{x}{2}}$$

Tomando una incógnita auxiliar, $t = \text{tg}\,\frac{x}{2}$, se tiene:

$$2\,\frac{2t}{1+t^2} + 3\,\frac{1-t^2}{1+t^2} = 3$$

Efectuando operaciones se obtiene la ecuación: $3t^2 - 2t = t(3t-2) = 0$.

$$t_1 = 0, \text{ luego, } \text{tg}\,\frac{x}{2} = 0; \qquad x_1 = \mathbf{n\,360^\circ}$$

$$t_2 = \frac{2}{3} = \text{tg}\,\frac{x}{2}; \qquad x_2 = \mathbf{67^\circ\ 21'\ 27''} + \mathbf{n\,180^\circ}$$

EJEMPLO 3.º — *Resolver la ecuación:* $\cos 2x = 1 + 4\,\text{sen } x$

Por ser [25], $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$, la ecuación dada se convierte en:

$$\cos^2 x - \text{sen}^2 x = 1 + 4\,\text{sen } x; \qquad 1 - 2\,\text{sen}^2 x = 1 + 4\,\text{sen } x$$

$$\text{sen}^2 x + 2\,\text{sen } x = 0; \qquad \text{sen } x\,(\text{sen } x + 2) = 0$$

$\text{sen } x + 2$ no puede ser igual a 0, pues $\text{sen } x$ nunca es superior a 1. Sólo tenemos:

$$\text{sen } x = 0; \qquad x_1 = \mathbf{n\,180^\circ}$$

EJEMPLO 4.º — *Resolver la ecuación:* $\operatorname{sen}(2x+60°) + \operatorname{sen}(x+30°) = 0$.

Transformándola, se tiene [43],

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}+45°\right)\cos\left(\frac{x}{2}+15°\right)=0$$

$\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}+45°\right)=0$; $\quad \frac{3x}{2}+45° = n\,180°$; $\quad x_1 = \mathbf{n\,120° - 30°}$

$\cos\left(\frac{x}{2}+15°\right)=0$; $\quad \frac{x}{2}+15° = 90° + n\,180°$; $\quad x_2 = \mathbf{150° + n\,360°}$

EJEMPLO 5.º — *Resolver la ecuación:* $\operatorname{sen} x + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} 30°$. Sustituyendo en la ecuación dada, se tiene:

$$\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 30°}{\cos 30°} \times \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Efectuando las operaciones siguientes, se obtiene el valor de x:

$$\operatorname{sen} x \cos 30° + \operatorname{sen} 30° \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos 30°$$

Observando que $\operatorname{sen} x \cos 30° + \cos x \operatorname{sen} 30° = \operatorname{sen}(x+30°)$ y $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ se tiene: $\operatorname{sen}(x+30°) = \frac{1}{2}$

Luego:

$x + 30° = 30° + n\,360°$ $\qquad x_1 = \mathbf{n\,360°}$

$x + 30° = 150° + n\,360°$ $\qquad x_2 = \mathbf{120° + n\,360°}$

EJEMPLO 6.º — *Resolver la ecuación:* $\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x \cos x + 2\cos^2 x = 0$

Dividiendo todos los términos por $\cos^2 x$, se tiene:

$$\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$$

Haciendo $\operatorname{tg} x = t$ y resolviendo la ecuación, se tiene: $t_1 = 1$; $t_2 = 2$, o sea:

$t_1 = \operatorname{tg} x = 1$ $\qquad x_1 = \mathbf{45° + n\,180°}$

$t_2 = \operatorname{tg} x = 2$ $\qquad x_2 = \mathbf{63°\,26'\,5'',9 + n\,180°}$

237. Sistemas de ecuaciones trigonométricas. — La única regla general que puede ser útil para resolver sistemas de ecuaciones trigonométricas, es la de buscar las relaciones existentes entre los datos de las ecuaciones dadas que nos permitan reducirlas a otras de solución más fácil.

EJEMPLO 1.° — *Resolver el sistema:* $\begin{cases} 2\operatorname{sen} x = 1 - \cos y & [1] \\ 2\cos x = 1 + \cos y & [2] \end{cases}$

Elevando al cuadrado y sumando, se tiene:

$$4(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = 2(1 + \cos^2 y); \qquad 4 = 2(1 + \cos^2 y); \qquad \cos^2 y = 1$$

Por consiguiente: $\cos y = \pm 1$

De $\cos y = 1$, se obtiene $y_1 = \mathbf{n\,360°}$

De $\cos y = -1$, se obtiene $y_2 = \mathbf{180° + n\,360°}$

De la ecuación [1] se obtiene:

para $\cos y_1 = 1$ $\quad 2\operatorname{sen} x_1 = 0$ $\quad x_1 = \mathbf{n\,360°}$

para $\cos y_2 = -1$ $\quad 2\operatorname{sen} x_2 = 2$ $\quad x_2 = \mathbf{90° + n\,360°}$

EJEMPLO 2.° — *Resolver el sistema:* $\begin{cases} x + y = a & [1] \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \dfrac{m}{n} & [2] \end{cases}$

De la ecuación [2] obtenemos sucesivamente:

$$\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y} = \frac{m+n}{m-n}; \qquad \frac{\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{x-y}{2}} = \frac{m+n}{m-n}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \frac{m-n}{m+n} \cdot \operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = \frac{m-n}{m+n} \cdot \operatorname{tg}\frac{a}{2}$$

Si α es el menor ángulo cuya tangente es igual a $\dfrac{m-n}{m+n} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{a}{2}$, se tiene:

$$\frac{x-y}{2} = \alpha + n\,180°$$

De esta ecuación y de la [1], se obtiene:

$$x = \frac{\mathbf{a}}{2} + \alpha + \mathbf{n\,180°} \qquad y = \frac{\mathbf{a}}{2} - (\alpha + \mathbf{n\,180°})$$

Análogamente se resuelven los sistemas

$$\begin{cases} x - y = a \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \dfrac{m}{n} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = a \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = \dfrac{m}{n} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = a \\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \dfrac{m}{n} \end{cases}$$

EJEMPLO 3.° — *Resolver el sistema:* $\begin{cases} x + y = a & [1] \\ \cos x + \cos y = m & [2] \end{cases}$

Recordando [45], se tiene:

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = m$$

y de aquí se deduce

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{m}{2 \cos \frac{1}{2}(x+y)} = \frac{m}{2 \cos \frac{1}{2} a}$$

Si α es el menor ángulo cuyo coseno es $\dfrac{m}{2 \cos \frac{1}{2} a}$, se tiene:

$$\frac{x-y}{2} = n\,360° \pm \alpha$$

De esta ecuación y de la [1], se obtiene:

$$x = \frac{a}{2} + n\,360° \pm \alpha; \qquad y = \frac{a}{2} - (n\,360° \pm \alpha)$$

EJERCICIOS

582. Calcular la altura de una torre situada en terreno horizontal, sabiendo que con un aparato de 1'20 m. de altura, colocado a 20 m. de ella, se ha medido el ángulo que forma con el horizonte la visual dirigida al punto más elevado, y se ha obtenido 48° 30′ 15″.

583. Proponer y resolver un problema del mismo tipo que el resuelto en el número 232 del texto.

584. Proponer y resolver un problema del mismo tipo que el resuelto en el número 233 del texto.

585. Proponer y resolver un problema del mismo tipo que el resuelto en el número 234.

586. Como aplicación del número 235 del texto, calcular la distancia x entre los puntos inaccesibles A y B (fig. 131), suponiendo que la base $b = 420$ metros, $\alpha = 68° \ 11' \ 23''$, $\alpha' = 32° \ 36' \ 14''$, $\beta = 43° \ 52' \ 49''$ y $\beta' = 84° \ 43' \ 8''$.

Véanse ejercicios sobre ecuaciones trigonométricas al final del libro.

32. Funciones

238. Concepto de función. — *Llamamos función o variable dependiente a la variable cuyos valores dependen de los que toma otra variable, denominada variable independiente.*

Los valores que toma la variable independiente, unas veces son dados libremente por nosotros, y otras vienen impuestos por la Naturaleza.

EJEMPLOS: La longitud (FUNCIÓN) de una circunferencia depende del radio (VARIABLE INDEPENDIENTE) con que queramos trazarla.

La altura (FUNCIÓN) alcanzada por la columna barométrica depende de la presión atmosférica (VARIABLE INDEPENDIENTE), la cual viene impuesta por el estado de la atmósfera.

Para representar una función emplearemos ordinariamente la letra y, y para designar a la variable independiente usaremos la letra x.

La relación de dependencia entre la variable y la función se representa por una letra (f, φ, ψ, ... F, Φ, Ψ, ...) llamada *característica* de la función, la cual se escribe delante de la variable independiente; ésta, o bien uno de sus valores particulares, va encerrada en un paréntesis. Así, pondremos

$$y = f(x), \qquad y = \varphi(x), \qquad y = \psi(x)$$

expresiones que se leen, respectivamente: «y igual función f de x», «y igual función φ de x» e «y igual función ψ de x».

En el ejemplo $y = x^2 - 3x + 5$, la ley funcional va expresada por $y = f(x)$, y el símbolo $f(2)$ indica el valor que toma la función cuando a la variable se le da el valor 2, es decir:

$$f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 3$$

Algunas funciones llevan en lugar de la característica la abreviatura convencional del nombre con que se las conoce; por ejemplo, $y = \log x$, $y = \text{sen } x$, etc.

Hay funciones que dependen de dos o más variables. Se dice de u, por ejemplo, que es función de x, y, z, cuando a cada conjunto de valores de x, y, z, llamadas variables independientes, corresponde un valor de u. La representaremos así: $u = f(x, y, z)$. Nosotros estudiaremos sólo las funciones de una variable.

239. Clasificación de las funciones. — Podemos considerar primeramente dos grandes grupos: *funciones analíticas* y *funciones empíricas.*

Analíticas. Son aquellas en las que la correspondencia entre los valores de la variable independiente y los de la función está expresada por una fórmula matemática.

Empíricas. Se llaman así cuando la correspondencia entre los valores de la variable independiente y los de la función viene dada solamente por hechos experimentales, sin fórmula matemática que la exprese.

EJEMPLOS DE FUNCIONES EMPÍRICAS. — La temperatura registrada por un termómetro a lo largo del día, tomando el tiempo como variable independiente.

La demanda de una mercancía con relación a su precio.

Las funciones analíticas se clasifican, a su vez, en *algebraicas* y *trascendentes.*

Son *algebraicas,* cuando las operaciones que hay que efectuar con la variable independiente son de álgebra elemental (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación).

Son *trascendentes,* cuando la variable independiente figura como exponente o como índice, o se halla afectada del signo logarítmico o de cualquiera de los que emplea la trigonometría.

He aquí las principales funciones trascendentes:

Exponenciales ..... $y = a^x, \quad y = e^x$

Logarítmicas ..... $y = \log_a x, \quad y = \ln x$

Circulares o trigonométricas .....

$$\begin{cases} y = \operatorname{sen} x & y = \operatorname{cotg} x \\ y = \cos x & y = \sec x \\ y = \operatorname{tg} x & y = \operatorname{cosec} x \end{cases}$$

Las funciones algebraicas pueden ser *explícitas* o *implícitas.*

Son *explícitas,* cuando por simple sustición podemos obtener en la ecuación que las define los valores de y que corresponden a los dados a x. Es decir, una función es explícita cuando y aparece despejada.

EJEMPLOS:

$$y = 3x + 2; \qquad y = 2x^2 - 3x + 1; \qquad y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

En general, una función explícita se representa por $y = f(x)$.

Son *implícitas*, cuando los valores de y correspondientes a los dados a x no se pueden obtener por simple sustitución, sino que es preciso efectuar operaciones y despejar y.

EJEMPLOS:

$$2x + 5y - 3 = 0; \qquad 4x - 7y + 1 = 0; \qquad 2y + \frac{3xy}{5} - x = 0$$

En general, una función implícita se representa por $f(x, y) = 0$.

Las funciones implícitas se transforman en explícitas despejando y de la ecuación que las define, si es posible.

Así, la forma explícita de los ejemplos anteriores será, respectivamente:

$$y = \frac{3 - 2x}{5}; \qquad y = \frac{4x + 1}{7}; \qquad y = \frac{5x}{10 + 3x}$$

Las funciones explícitas se dividen, a su vez, en *racionales* e *irracionales*. En las primeras, la variable x no figura debajo del signo radical ni lleva exponente fraccionario; en las segundas, la variable x aparece debajo del signo radical o está afectada de exponente fraccionario.

Por último, las funciones racionales pueden ser *enteras* o *fraccionarias*, según que la expresión del segundo miembro sea entera o fraccionaria con relación a la variable independiente x.

Podemos resumir la clasificación establecida en el siguiente cuadro:

Funciones
- analíticas
  - algebraicas ....
    - explícitas
      - racionales
        - enteras
        - fraccionarias
      - irracionales
    - implícitas
  - trascendentes .....
    - exponenciales
    - logarítmicas
    - circulares
- empíricas

240. Representación gráfica de una función. — Resulta muy útil la representación gráfica de las funciones, ya que mediante la gráfica se adquiere un conocimiento más completo de la función, al hacerse aquél intuitivo. Además, merced a la representación gráfica, es posible resolver muchos problemas sin necesidad de acudir al cálculo.

Vimos ya (núms. 79 y 82) la representación gráfica de las funciones exponencial y logarítmica. Vamos ahora a construir la gráfica de dos funciones trigonométricas: la función coseno y la función tangente.

Si en las razones trigonométricas consideramos al arco como variable, el valor de las razones será función del arco, y tendremos así las *funciones circulares* o *trigonométricas:*

$y = \text{sen}\, x, \quad y = \cos x, \quad y = \text{tg}\, x, \quad y = \text{cotg}\, x, \quad y = \sec x, \quad y = \text{cosec}\, x$

cuyas gráficas se denominan, respectivamente, *sinusoide, cosinusoide, tangentoide, cotangentoide, secantoide* y *cosecantoide.*

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $y = \cos x$. — Demos a x valores desde 0 a 2π y hallemos los correspondientes de y, con lo que habremos obtenido la tabla de valores que necesitamos. Para esto nos puede servir la *tabla* del final del libro.

Si $x =$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$y =$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

Llevando estos valores sobre un par de ejes cartesianos tendremos una serie de puntos que, unidos, nos darán la gráfica del coseno o cosinusoide (fig. 133).

También hubiéramos podido prescindir de la tabla de valores, y haber determinado sobre una circunferencia trigonométrica (de radio igual a la unidad) las longitudes del coseno, que serán las ordenadas de la curva. Para esto, ayuda el colocar la circunferencia de modo que su diámetro vertical sea la prolongación del eje XX' de la gráfica, para trasladar las ordenadas valiéndose de paralelas al eje XX', tal como aparece en la figura.

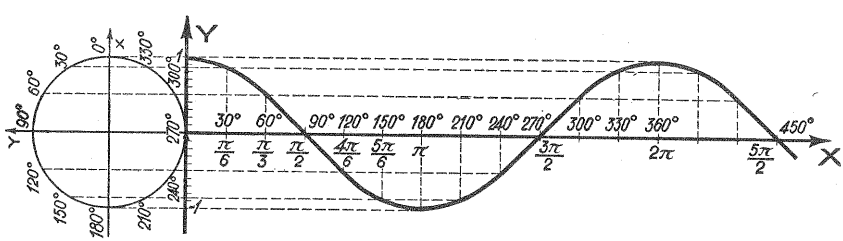


FIG. 133. — COSINUSOIDE

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $y = \text{tg}\, x$. — Construyamos la tabla de valores, para lo cual demos a x valores entre 0 y 2π. Ver *tabla* del final del libro.

Si $x =$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y =$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	3'7	$\pm\infty$	$-3'7$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Llevados estos pares de valores a un sistema de ejes cartesianos, se obtiene la gráfica de la tangente o tangentoide (fig. 134).

Podemos también prescindir de la tabla de valores y determinar gráficamente en una circunferencia trigonométrica las longitudes de la tangente, que serán ordenadas de la curva, y proceder luego de forma análoga a como se dijo para la cosinusoide. Aunque en este caso no hay necesidad de girar la circunferencia 90°, como se hizo entonces.

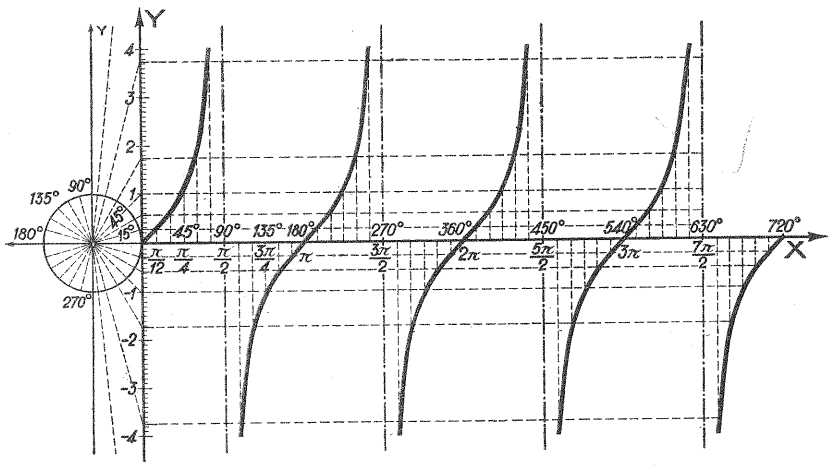


FIG. 134. — TANGENTOIDE

241. Campo de existencia de una función. — *Se llama campo de existencia de una función al conjunto de valores de la variable* x, *para los que* y *toma valores reales.*

En la función $y = 3x + 2$, la variable x puede tomar cualquier valor, por lo que decimos que el campo de la función es el intervalo $(-\infty, +\infty)$. En la función $y = \sqrt{x-2}$, lo es $(2, +\infty)$, ya que los valores de x menores que 2 hacen el radicando negativo y no dan valor real a y.

El campo de existencia de la función se llama también *campo de variabilidad de la variable independiente.*

242. Incremento de la variable e incremento de la función. — Sea la función $y = f(x)$, y supongamos que su representación gráfica es la curva de la figura 135. Si de un valor x de la variable independiente pa-

samos a otro x_1, decimos que hemos incrementado a la variable independiente.

Incremento de la variable independiente es la diferencia $x_1 - x$ *entre el nuevo valor y el primitivo.*

Dicho incremento se designa por la letra griega Δ seguida de la x, y se lee «incremento de x». Tendremos, por tanto:

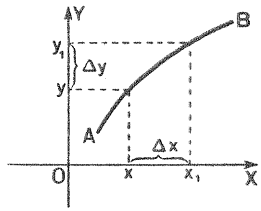


FIG. 135

$$\Delta x = x_1 - x, \quad \text{de donde,} \quad x_1 = x + \Delta x$$

En la misma figura 135, vemos que al pasar la variable del valor x al x_1, la función ha pasado del valor y al valor y_1, es decir, la función también se ha incrementado.

Incremento de la función es la diferencia $y_1 - y$ *entre el nuevo valor y el primitivo.*

El incremento de la función se designa por la notación Δy, que se lee «incremento de y». Tendremos, por tanto:

$$\Delta y = y_1 - y = f(x_1) - f(x) = f(x+\Delta x) - f(x),$$
$$\text{de donde,} \quad y_1 = y + \Delta y$$

No siempre el incremento que experimenta la función es del mismo signo que el incremento dado a la variable independiente; puede ocurrir que al incrementar positivamente a la variable, la función sufra un incremento negativo.

243. Función continua. — Supongamos una función $y = f(x)$, definida en un intervalo (a, b), y sea x_1 un valor particular de x comprendido en dicho intervalo. Si a este valor le incrementamos en una pequeña cantidad Δx, la expresión $x_1 + \Delta x$ representará un valor próximo a x_1, y los valores correspondientes de la función, serán y_1 e $y_1 + \Delta y$, o sea:

$$y_1 = f(x_1); \qquad y_1 + \Delta y_1 = f(x_1+\Delta x); \qquad \Delta y_1 = f(x_1+\Delta x) - f(x_1)$$

El valor de Δx es una variable independiente, mientras que Δy es una función que depende del valor que se asigne a Δx.

EJEMPLO. — La función $y = 3x - 1$ toma el valor 5 para $x = 2$. Si damos a x el incremento $\Delta x = 0'1$, será $y + \Delta y = 3(2+0'1) - 1 = 5'3$, o sea que $\Delta y = 0'3$.

Si hacemos $\Delta x = 0'001$, será $y + \Delta y = 3(2+0'001) - 1 = 5'003$; luego, $\Delta y = 0'003$.

Si hacemos que Δx tienda a cero, veremos que Δy tiende también a cero, es decir que a un incremento infinitésimo de x, corresponde un incremento infinitésimo de y. Este caso, que es el más frecuente entre las funciones estudiadas hasta ahora, da lugar al concepto de *continuidad.*

De una función $y = f(x)$ *se dice que es continua en un punto* x_1, *cuando, estando definida en dicho punto, a un incremento infinitésimo de la variable, corresponde también un incremento infinitésimo en la función.*

Una función es continua en un intervalo (a, b) *cuando lo es en todos los puntos de dicho intervalo.*

Fácilmente se ve que las funciones enteras son continuas, así como las fraccionarias en los puntos que no anulan al denominador.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA. — En la representación gráfica de una función se reconocen inmediatamente los puntos en que la función no es continua: en unos porque la gráfica queda rota, en otros porque la función se hace infinita; tal sucede, por ejemplo, con la función $y = \dfrac{2}{x-1}$ para $x = 1$, y con la función $y = \operatorname{tg} x$, para $x = \dfrac{\pi}{2}$ (fig. 134).

244. Funciones crecientes y funciones decrecientes. — Observando la figura 135 vemos que a un incremento positivo de la variable, ha correspondido también un incremento positivo en la función. Por esta razón, por tener el mismo signo los dos incrementos, la curva AB sube, es decir, la función es *creciente.*

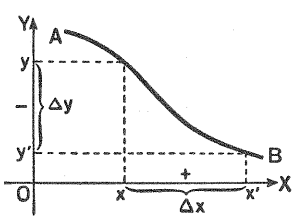


FIG. 136

En la figura 136 vemos, por el contrario, que a un incremento positivo de x, ha correspondido un incremento negativo en y, por lo que la curva baja; decimos en este caso que la función es *decreciente.*

Una función es creciente, cuando los dos incrementos tienen el mismo signo.

Una función es decreciente, cuando los dos incrementos tienen signos contrarios.

245. Funciones monótonas. — *Llámanse funciones monótonas aquellas que en todo su campo de existencia son siempre crecientes o siempre decrecientes.*

La función lineal, la exponencial y la logarítmica son funciones monótonas. También lo son las trigonométricas $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{cotg} x$.

246. Funciones inversas. — Dada una función $y = f(x)$, que llamaremos *directa,* se denomina función *inversa* de ella a la función $x = \varphi(y)$ que resulta al cambiar el papel de las variables, es decir, cuando la variable independiente pasa a ser función, y viceversa.

Para obtener en forma explícita la función inversa de una dada, se despeja en ésta la variable independiente, que pasa a ser función.

EJEMPLOS: $y = x^2 + 2$ (directa) $\quad x = \sqrt{y-2}$ (inversa)
$y = a^x$ (directa) $\quad x = \log_a y$ (inversa)

Para acomodarse a la notación ordinaria es costumbre, después de hecha la inversión, seguir designando a la función por y, y a la variable independiente por x. Según esto, las anteriores funciones se escribirán:

$$y = \sqrt{x-2} \quad \text{e} \quad y = \log_a x$$

247. Relación entre las gráficas de dos funciones inversas. — Dos puntos simétricos, M y M', N y N' (figura 137), respecto de la bisectriz del primer cuadrante en un sistema de ejes cartesianos, tienen la propiedad de que la ordenada de uno es abscisa del otro, y viceversa. Como es eso precisamente lo que ocurre con los puntos de dos funciones inversas, diremos:

Las gráficas de dos funciones inversas son dos líneas simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

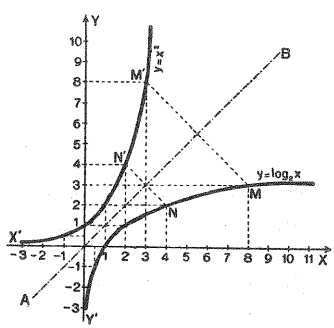


FIG. 137

En la figura 137 vemos representadas gráficamente dos funciones inversas, $y = 2^x$ (exponencial) e $y = \log_2 x$ (logarítmica). La siguiente tabla de valores nos ha servido para el trazado de ambas

x	$-\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	∞	$y = \log_2 x$
$y = 2^x$	0	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...	∞	x

EJERCICIOS

587. El lado de un triángulo equilátero es l. Expresar la altura h del triángulo en función de l.

588. Expresar la superficie S de un triángulo equilátero en función de su lado l.

589. Un rectángulo $ABCD$, de altura igual a x, está inscrito en un círculo cuyo radio es 10. Expresar la superficie del rectángulo en función de x.

590. Un triángulo equilátero ABC está inscrito en un círculo de radio r. Expresar el área S del triángulo en función de r.

591. Expresar el área de un círculo en función de su circunferencia.

592. Si $f(x) = 2x - 5$, hallar $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(-4)$.

593. Si $f(x) = 5x^2 - 3x + 11$, hallar $f(0)$; $f(1)$; $f(3)$; $f(a)$.

594. Si $f(x) = \dfrac{x^3 + 7}{x + 1}$, hallar $f(0)$; $f(1)$; $f(3)$; $f(-2)$.

595. Si $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 10$, hallar $f(0)$; $f(3)$; $f(5)$.

596. Si $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x}$, hallar $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(-1)$.

597. Clasificar las siguientes funciones:

1. $y = x^2 - 3x + 5$
2. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^3 - x + 2}$
3. $y = \sqrt{1 - x^2}$
4. $y = \sqrt{\dfrac{1 - x^2}{1 + 3x^2}}$
5. $y = 5 \cdot 3^{2x}$
6. $y = \dfrac{1}{x}$
7. $y = \ln(3x + 4)$
8. $y = \log \sqrt{1 - x}$
9. $y = \operatorname{sen} 3x$
10. $y = \cos \sqrt{\dfrac{\pi}{x}}$
11. $y = \operatorname{tg}(\pi - 3x)$
12. $y = \operatorname{cotg} 2x$

598. Determinar el campo de existencia de las funciones del ejercicio anterior.

599. Deducir la fórmula que da el incremento de la función $y = x^2 - 2x + 1$ y calcular el incremento para $x = 1$ e $\Delta x = 0'01$.

600. Íd. de la función $y = 3^x$, para $x = 2$ e $\Delta x = \frac{1}{2}$.

601. Probar que la función $y = x^2$ es creciente en el punto $x = 2$.

602. Indicar si son continuas o discontinuas las siguientes funciones:

a) $y = x^2 - 2x + 1$; *b)* $y = 4x^3 - 2x + 1$; *c)* $y = \dfrac{3}{x - 2}$;

d) $y = \dfrac{4}{1 - x^2}$; *e)* $y = \dfrac{2}{(1-x)(4-x)}$

603. Indicar para qué valores de x son discontinuas las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{6}{x + 1}$; *b)* $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$; *c)* $y = \dfrac{2}{(x^2-4)(x-9)}$

33. Noción de derivada

248. Cociente incremental. — Hemos visto el interés que tiene la consideración de los incrementos, Δy e Δx, de la función y de la variable; comparándolos, hemos definido cuándo una función es continua o discontinua y cuándo es creciente o decreciente.

Consideremos ahora la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, llamada *cociente de incrementos* o *cociente incremental*. Este cociente representa el *crecimiento medio* o *velocidad media de crecimiento* de una función cualquiera en el intervalo Δx.

El estudio del cociente de incrementos tiene gran interés en Física, Química y demás ciencias aplicadas, ya que mediante él se puede calcular si un determinado fenómeno crece más rápidamente en un intervalo de la variable independiente que en otro.

249. Tangente a una curva. — Supongamos (fig. 138) una curva y en ella una secante *PA*, que va tomando distintas posiciones al girar alrededor de uno de los puntos de intersección, el *P* en este caso. A medida que el otro punto de intersección, *A*, va aproximándose a *P*, la secante tiende a confundirse con la tangente *PT* a la curva en el punto *P*. Es decir, que:

Tangente a una curva en un punto P, *es la posición límite de la secante* PA *cuando* A *tiende a confundirse con* P.

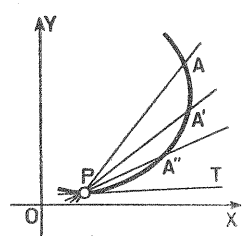


FIG. 138

250. Noción de derivada. — Más interesante aun que hallar el crecimiento medio de una función en un intervalo, es calcular el crecimiento en un punto. Equivale esto a averiguar el *crecimiento instantáneo* o *velocidad instantánea* de variación de la función en dicho punto, lo que se consigue hallando el límite del cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en ese punto, cuando Δx tiende a cero. Entonces, en efecto, el intervalo se ha convertido en un punto, y el límite hallado lo denominamos derivada de la función en dicho punto.

DEFINICIÓN. — **Derivada de una función en un punto es el límite del cociente del incremento de la función dividido por el incremento de la variable en dicho punto, al tender este incremento a cero.**

Dada una función $y = f(x)$ que tenga derivada en los diversos puntos de un intervalo, a la función que hace corresponder a cada valor de x el valor de la derivada en ese punto de la función dada, se llama *función derivada* de $y = f(x)$.

Las funciones que tienen función derivada se llaman *derivables*, y la operación por la cual se halla la derivada recibe el nombre de *derivación*.

La derivada de una función $y = f(x)$ se representa por y' o $f'(x)$; de acuerdo con esto y según la anterior definición, pondremos:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{o bien} \qquad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

251. Regla general para el cálculo de derivadas. — Para hallar la derivada de una función $y = f(x)$ se efectúan las siguientes operaciones:

1.° *Se sustituye en la función* x *por* x + Δx, *y se calcula el nuevo valor de la función* y + Δy.

2.° *Se halla el incremento de la función, restando para ello de la función incrementada la función sin incrementar.*

3.° *Se obtiene el cociente de incrementos* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

4.° *Se halla el límite a que tiende ese cociente, cuando* Δx *tiende a cero. El límite hallado será la derivada de la función dada.*

EJEMPLO. — Calcular la derivada de la función entera: $y = 2x^2 - 3x + 1$.

1.° Incrementando, tenemos:

$$y + \Delta y = 2(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 1 = 2x^2 + 4x\Delta x + 2\Delta x^2 - 3x - 3\Delta x + 1$$

2.° Restando la función dada: $\Delta y = 4x\Delta x + 2\Delta x^2 - 3\Delta x$

3.° Dividiendo por Δx, resulta: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x - 3$

4.° Hallando el límite de esta expresión, cuando Δx tiende a 0, se obtiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x - 3; \qquad \text{luego,} \qquad y' = 4x - 3$$

252. Interpretación geométrica de la derivada. — Consideremos una función $y = f(x)$ cuya representación gráfica sea la curva PA (fig. 139). Tracemos las coordenadas correspondientes a las abscisas x y x_1. Por el punto P tracemos la recta PC, paralela al eje OX. Tracemos asimismo la secante PA. En el intervalo (x, x_1) se tiene:

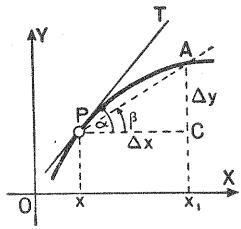


FIG. 139

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{AC}{PC} = \operatorname{tg} APC = \operatorname{tg} \beta$$

Si suponemos ahora que Δx tiende a cero, el punto x_1 tenderá a confundirse con x, el punto A tenderá a confundirse con P, la secante PA tenderá a su posición límite que es la tangente PT (núm. 249), el ángulo β tenderá al ángulo α, y $\operatorname{tg} \beta$ a $\operatorname{tg} \alpha$. De otro modo:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$$

Luego, *la derivada de una función en un punto* x, *es igual a la tangente trigonométrica del ángulo que forma la tangente geométrica a la curva en dicho punto, con la dirección positiva del eje de abscisas.*

253. Interpretaciones físicas de la derivada. — Sucede a menudo en Física que si un fenómeno puede expresarse matemáticamente mediante una función, al derivar dicha función se obtiene otra que es también la expresión matemática de un nuevo aspecto de aquel fenómeno.

Es clásico el siguiente ejemplo. Supongamos un móvil que se mueve con movimiento uniformemente variado y recordemos que la ecuación (función) de este movimiento es $s = \frac{1}{2} at^2$. Pues bien: vamos a probar que el resultado de derivar la función $s = f(t)$ es precisamente la ecuación $v = at$, es decir, $v = f'(t)$, que representa como sabemos la velocidad del movimiento uniformemente variado.

Para obtener la derivada que deseamos, apliquemos la regla anteriormente enunciada.

Primer paso:

$$s + \Delta s = \tfrac{1}{2} a(t + \Delta t)^2 = \tfrac{1}{2} a(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) = \tfrac{1}{2} at^2 + at\Delta t + \tfrac{1}{2} a\Delta t^2$$

Segundo paso:

$$\Delta s = \tfrac{1}{2} at^2 + at\Delta t + \tfrac{1}{2} a\Delta t^2 - \tfrac{1}{2} at^2 = at\Delta t + \tfrac{1}{2} a\Delta t^2$$

Tercer paso:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{at\Delta t}{\Delta t} + \frac{\frac{1}{2}a\Delta t^2}{\Delta t} = at + \frac{1}{2}a\Delta t$$

Cuarto paso:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(at + \frac{1}{2}a\Delta t\right) = at = v$$

Luego, la función $s' = f'(t)$, derivada de la función *espacio*, $s = f(t)$, es la expresión matemática de la *velocidad* en el mismo movimiento.

En general, se tiene que en un movimiento cualquiera, el cociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ representa la *velocidad media*, y $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ la *velocidad en el instante* t *o velocidad instantánea.*

EJERCICIOS

604. Calcular el crecimiento medio de las siguientes funciones en cada uno de los intervalos (1, 2), (2, 3) y (1, 3):

$$y = 3x^2 - 1; \qquad y = 2x^3 - x^2 + 3; \qquad y = (x+3)(x-1)$$

605. La longitud de una barra metálica es función de su temperatura, de acuerdo con la fórmula $l = l_0(1 + \alpha t)$. ¿Cuándo crece más aprisa la barra, al pasar de 2° a 3° o al pasar de 102° a 105°?

606. Calcular la derivada de las funciones siguientes, destacando las cuatro partes o pasos de la operación:

$$y = 2x + 3; \qquad y = x^2; \qquad y = 3x^2 - 1; \qquad y = 4x^2 - x$$

607. ¿Qué ángulo formará con el eje XX' la tangente a la curva $y = x^2$, trazada por el punto $x = 3$?

608. ¿Qué ángulo formará con el eje XX' la tangente a la curva $y = 2x^3$, trazada por el punto $x = \frac{1}{2}$?

609. ¿En qué punto de la curva $y = \frac{1}{2}x^2$ deberemos trazarle una tangente, para que esta recta forme con el eje XX' un ángulo de 60°?

610. ¿En qué punto hemos de trazar una tangente a la curva $y = 3x^2 + 2x$, para que dicha tangente forme con XX' un ángulo de 135°?

611. Según la Física, la fórmula de la *fuerza viva* de un cuerpo de masa m, animado de la velocidad v, es $f = \frac{1}{2}mv^2$. Probar que el producto mv, que se llama *cantidad de movimiento*, es la derivada de la fuerza viva.

612. ¿Qué interpretación geométrica daremos a la derivada del volumen de la esfera? Volumen de la esfera, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

34. Las funciones de la proporcionalidad

254. Función representativa de la proporcionalidad directa. — Cuando dos variables x e y están relacionadas por una función de la forma

$$y = kx \qquad (k = \text{constante}) \qquad [1]$$

se dice que dichas variables son DIRECTAMENTE PROPORCIONALES, ya que, en efecto, sucede que *al multiplicar el valor de* x *por un número, el correspondiente valor de* y *queda multiplicado por el mismo número.*

La función anterior puede escribirse también así:

$$\frac{y}{x} = k$$

lo que nos dice que *la razón de los valores corespondientes de las variables* y *y* x *es constante.*

La proporcionalidad directa va, pues, expresada por una función del mismo tipo que la [1], en la que k es la *constante de proporcionalidad.*

255. Representación gráfica de la función $y = kx$. — Por tratarse de una función lineal o de primer grado, su representación gráfica sabemos que será una recta. Además, en este caso, por carecer de término independiente de x, la recta pasará por el origen, y formará con el eje OX un ángulo de tangente trigonométrica igual a k.

Supongamos, en efecto, que se trata de la recta AB (fig. 140). Los triángulos rectángulos OPM y $OP'M'$ son semejantes y, por consiguiente, sus catetos serán proporcionales; luego, se puede escribir:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \text{tg } \alpha = k$$

de donde,

$$y_1 = k x_1, \qquad y_2 = k x_2,$$

y en general, $y = kx$

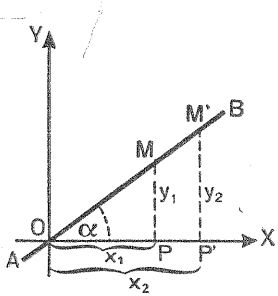


FIG. 140

256. Función representativa de la proporcionalidad inversa. — Si dos variables x e y están relacionadas por una función del tipo

$$y = \frac{k}{x} \qquad (k = \text{constante}) \qquad [2]$$

se dice que dichas variables son INVERSAMENTE PROPORCIONALES, ya que, en efecto, sucede que *al multiplicar el valor de* x *por un número, el correspondiente de* y *queda dividido por el mismo número, y viceversa.*

La anterior función puede también escribirse así:

$$xy = k$$

lo que nos dice que *el producto de los valores correspondientes de las variables* x *e* y *es constante.*

La proporcionalidad inversa va, pues, expresada por una función del mismo tipo que la [2], en la que k es la *constante de proporcionalidad.*

257. Representación gráfica de la función $y = \frac{k}{x}$. — La gráfica de esta función es una *hipérbola equilátera,* es decir, con los dos ejes $2a$ y $2b$ iguales. Los ejes XX' e YY' a los cuales va referida, son a la vez sus *asíntotas* (tangentes a la curva en el infinito).

EJEMPLO. — Representar gráficamente la función

$$xy = 12 \quad \text{o su equivalente} \quad y = \frac{12}{x}$$

TABLA DE VALORES

Si $x =$	-12	-8	-6	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$
$y =$	-1	$-1\frac{1}{2}$	-2	-3	-4	-6	-12	-24

$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	6	8	12
24	12	6	4	3	2	$1\frac{1}{2}$	1

Uniendo con trazo continuo los puntos obtenidos, quedará construída la curva que, como se ve, consta de dos ramas (fig. 141), y se trata de una hipérbola equilátera.

Observemos en el siguiente cuadro la variación que experimenta y al variar x de $-\infty$ a $+\infty$. La letra ε (épsilón) representa un infinitésimo, o sea un número que tiende a cero.

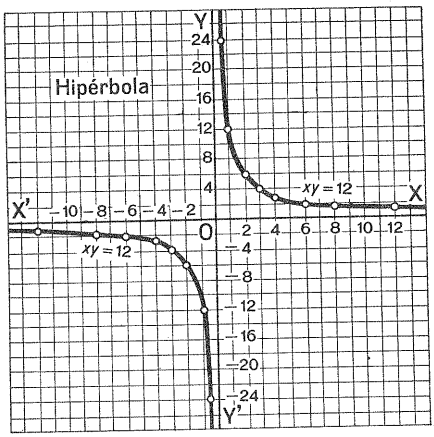


FIG. 141

x	y
$-\infty$	$\dfrac{k}{-\infty} = 0$
crece	decrece
0	$\dfrac{k}{0}$ { $\dfrac{k}{-\varepsilon} = -\infty$ ... la función se rompe: es *discontinua* $\dfrac{k}{+\varepsilon} = +\infty$
crece	decrece
$+\infty$	$\dfrac{k}{+\infty} = 0$

Muchos fenómenos físicos van expresados por una función de este tipo. Tal, por ejemplo, la *ley de Boyle-Mariotte* cuya expresión matemática es

$$p \cdot v = c \text{ (constante)} \quad \text{o bien,} \quad v = \frac{c}{p}$$

y cuyo enunciado es el siguiente: *A temperatura constante, el volumen de un gas es inversamente proporcional a la presión que soporta.*

258. Derivadas de las funciones $y = kx$ e $y = \dfrac{k}{x}$. — Apliquemos la regla general de derivación al cálculo de las derivadas de estas funciones.

1.° FUNCIÓN $y = kx$ DE LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA:

Primer paso: $y + \Delta y = k(x + \Delta x)$

Segundo paso: $\Delta y = k(x + \Delta x) - kx = k\Delta x$

Tercer paso: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{k\Delta x}{\Delta x} = k$

Cuarto paso: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$

Luego,

$$y' = k$$

2.° FUNCIÓN $y = \frac{k}{x}$ DE LA PROPORCIONALIDAD INVERSA:

Primer paso: $y + \Delta y = \frac{k}{x + \Delta x}$

Segundo paso: $\Delta y = \frac{k}{x + \Delta x} - \frac{k}{x} = -\frac{k\,\Delta x}{x(x+\Delta x)}$

Tercer paso: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{k}{x(x+\Delta x)}$

Cuarto paso: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{k}{x(x+\Delta x)} = -\frac{k}{x^2}$

Luego,

$$y' = -\frac{k}{x^2}$$

EJERCICIOS

Formar la tabla de valores y representar gráficamente las siguientes funciones:

613. $y = 4x$

614. $y = -2x$

615. $y = \frac{2}{3}x$

616. $y = \frac{8}{x}$

617. $y = \frac{-8}{x}$

618. $xy = -4$

619. $y = \frac{1}{x - 2}$

620. $y = \frac{3}{1 - x}$

621. $y = \frac{5}{3 + x}$

35. El trinomio de segundo grado

259. Variación del trinomio de segundo grado o estudio de la función $y = ax^2 + bx + c$. — El segundo miembro de esta función es un *trinomio de segundo grado en* x; por eso, el estudio de dicha función se denomina también *variación del trinomio de segundo grado.*

Los valores de x que anulan a la función, serán las raíces x_1 y x_2 de la ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad [1]$$

por lo que suele designárseles, asimismo, *ceros de la función.* Para otro cualquier valor de x, distinto de x_1 y x_2, la función propuesta dejará de anularse.

Para mejor efectuar el estudio de la variación de y, conviene descomponer en factores al trinomio $ax^2 + bx + c$.

La igualdad $\qquad y = ax^2 + bx + c$

es equivalente a

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

obtenida al multiplicar y dividir el segundo miembro por a.

Recordando por otra parte que

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{y} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

tendremos: $\qquad y = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]$

Ahora bien, la expresión encerrada en el paréntesis mayor, es el desarrollo del producto $(x - x_1)(x - x_2)$; por lo que resulta [1]

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad [2]$$

Hecha la descomposición del trinomio en factores, vamos a considerar *tres casos,* según que el discriminante de la ecuación [1] sea *positivo, nulo* o *negativo.*

---

(1) Se demuestra, en efecto, que si un polinomio entero $P(x)$, de grado n, se anula para n valores distintos de x, como x_1, x_2, x_3, ... x_n, dicho polinomio es equivalente al producto del coeficiente a del término de mayor grado, por los binomios $(x - x_1)$, $(x - x_2)$, $(x - x_3)$, ... $(x - x_n)$, pudiéndose, por tanto, escribir que

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n).$$

1.° EL DISCRIMINANTE, $b^2 - 4ac$, ES POSITIVO. Las raíces de la ecuación [1], o lo que es igual, los ceros de la función, son en este caso reales y desiguales.

Si hacemos que x tome en [2] un valor *comprendido* entre x_1 y x_2, las diferencias $(x-x_1)$ y $(x-x_2)$ serán una positiva y otra negativa; luego, el producto, es decir, *la función tendrá signo contrario al de* a.

Si damos a x un valor mayor que x_1 y x_2, las diferencias $(x-x_1)$ y $(x-x_2)$ serán ambas positivas, y *la función tendrá el mismo signo que* a.

Si, finalmente, damos a x un valor menor que x_1 y x_2, las diferencias $(x-x_1)$ y $(x-x_2)$ serán ambas *negativas*, y *la función tendrá también el mismo signo que* a.

En las figuras 142 y 143, se han representado gráficamente las funciones, del tipo de la propuesta,

$$y = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - 3 = \tfrac{1}{2}(x^2-x-6) = \tfrac{1}{2}(x+2)(x-3)$$

e

$$y = -\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x + 3 = -\tfrac{1}{2}(x^2-x-6) = -\tfrac{1}{2}(x+2)(x-3)$$

comprendidas ambas en este primer caso: la primera (fig. 142) tiene el coeficiente a positivo ($a>0$), y en la segunda (fig. 143) dicho coeficiente es negativo ($a<0$).

2.° EL DISCRIMINANTE, $b^2 - 4ac$, ES NULO. Por ser nulo el discriminante, las raíces x_1, x_2 de la ecuación [1], serán iguales: $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$; y la función [2] tomará la forma

$$y = a(x-x_1)^2$$

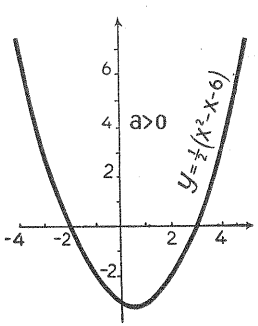


FIG. 142

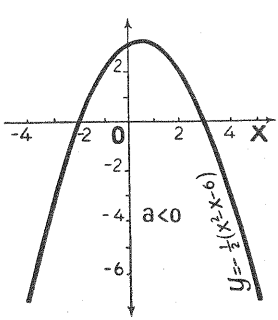


FIG. 143

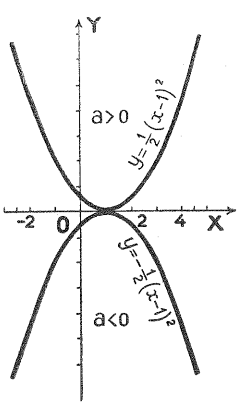


FIG. 144

de donde se deduce que, para cualquier valor que se atribuya a x, tomará y el *mismo signo de* a.

Tal es el caso de las dos funciones representadas en la figura 144:

$$y = \tfrac{1}{2}x^2 - x + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}(x^2-2x+1) = \tfrac{1}{2}(x-1)^2$$

e

$$y = -\tfrac{1}{2}x^2 + x - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2}(x^2-2x+1) = -\tfrac{1}{2}(x-1)^2$$

la primera de las cuales tiene el coeficiente a positivo ($a>0$), y la segunda, negativo ($a<0$).

3.° EL DISCRIMINANTE, $b^2 - 4ac$, ES NEGATIVO. El hecho de que el discriminante sea negativo, significa que la ecuación [1] no tiene raíces reales, o lo que es igual, la función no se anula para ningún valor real de x. Las raíces son dos números complejos conjugados:

$$x_1 = \alpha + \beta i \quad \text{y} \quad x_2 = \alpha - \beta i$$

por lo que, sustituyendo en [2], resulta:

$$y = a(x-\alpha-\beta i)(x-\alpha+\beta i) = a[(x-\alpha)^2 + \beta^2]$$

Ahora bien: como lo encerrado en el paréntesis mayor es suma de dos números positivos, o uno nulo y el otro positivo, *la función* y *tendrá siempre el signo de* a.

Ejemplo de funciones comprendidas en este tercer caso son las representadas en la figura 145:

$$y = \tfrac{1}{2}x^2 - x + 1 = \tfrac{1}{2}(x^2-2x+2)$$

e

$$y = -\tfrac{1}{2}x^2 + x - 1 = -\tfrac{1}{2}(x^2-2x+2)$$

la primera de las cuales tiene el coeficiente a positivo ($a>0$), y la segunda, negativo ($a<0$).

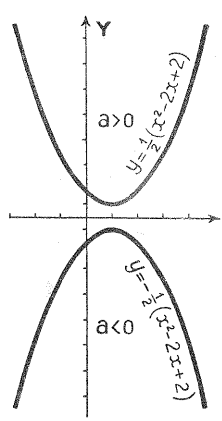


FIG. 145

260. Signo del trinomio. — Resumiendo lo dicho en el número anterior, podemos afirmar que *la función* $y = ax^2 + bx + c$, *o lo que es igual el trinomio* $ax^2 + bx + c$, *tiene el mismo signo que su primer coeficiente* a, *excepto en el caso en que teniendo la función dos ceros reales distintos,* x_1 *y* x_2, *el valor dado a* x *está comprendido entre* x_1 *y* x_2.

261. Representación gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$. — Consideremos, por ejemplo, el caso particular

$$y = x^2 + 5x - 6$$

Obtengamos primeramente la *tabla de valores;* demos, para ello, valores a x y hallemos los correspondientes de y. Se tiene:

cuando x =	−9	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	3	4
y =	30	8	0	−6	−10	−12	−12	−10	−6	0	18	30

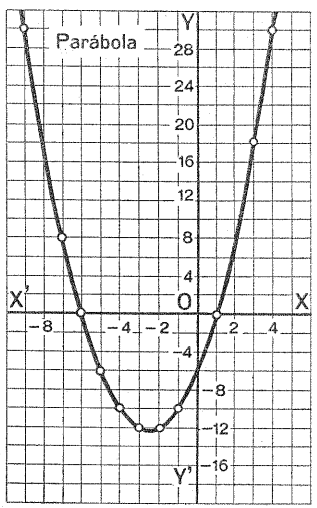


FIG. 146

Determinados los puntos que corresponden a los pares de valores que figuran en la tabla, y unidos luego por una línea curva, se obtiene la gráfica de la fig. 146.

En ella podemos comprobar lo dicho anteriormente en el estudio analítico. Así, observamos que los puntos en que la curva corta al eje de abscisas, corresponden a los *ceros de la función,* o lo que es igual, a las raíces de la ecuación $x^2 + 5x - 6 = 0$; dichas raíces son $x_1 = 1$, y $x_2 = -6$.

Para valores de x comprendidos entre -6 y 1, la función se hace negativa, es decir, de signo contrario al de a; mientras que, para valores de x no comprendidos en el intervalo $(-6, 1)$, la función es positiva, del mismo signo que a.

La función toma su valor *mínimo* para

$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{5}{2} = -2\frac{1}{2}$$

cuyo valor es

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-49}{4} = -12'25.$$

Cualquiera que sea el ejemplo que elijamos, si es del tipo de la función estudiada, $y = ax^2 + bx + c$, obtendremos siempre una parábola.

En Física se estudian muchos fenómenos, como el del movimiento uniformemente variado, cuya representación gráfica es una parábola.

262. Inecuaciones de segundo grado. — Llamamos *inecuación* a una desigualdad en la que aparece alguna incógnita en uno de sus miembros, o en los dos. *Resolver una inecuación* es determinar el conjunto de valores que la verifican o satisfacen.

En las inecuaciones se pueden efectuar las mismas trasformaciones que en las ecuaciones, pero advirtiendo que cuando se multiplican o dividen los dos miembros de una desigualdad por un mismo número NEGATIVO, *la desigualdad cambia de sentido.*

Para resolver las inecuaciones de SEGUNDO GRADO, cuya forma general es

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{o bien} \quad ax^2 + bx + c < 0$$

1.° *Se determinan las raíces de la ecuación* $ax^2 + bx + c = 0$.

2.° *Se compara el signo impuesto al trinomio por dichas raíces con el del coeficiente* a, *y se aplica la regla del signo correspondiente a ese caso* (núm. 260).

EJEMPLO 1.° — *Resolver la inecuación* $x^2 + x > 6$.

La inecuación dada es equivalente a $x^2 + x - 6 > 0$. Ahora bien: el trinomio $x^2 + x - 6$ tiene dos raíces reales y desiguales, ya que $b^2 - 4ac = 25 > 0$. Estas raíces son $x_1 = 2$ y $x_2 = -3$. Por otra parte, el coeficiente a del trinomio, $a = 1$, es positivo; luego, todo valor de x no comprendido en el intervalo $(-3, 2)$, hará que el referido trinomio tome un valor positivo, lo cual significa que ha de ser

$$x < -3 \quad \text{o bien} \quad x > 2$$

EJEMPLO 2.° — *Resolver la inecuación* $-2x^2 + 3x > 7$.

Esta inecuación puede escribirse así: $-2x^2 + 3x - 7 > 0$. El trinomio del primer miembro no tiene raíces reales, ya que $b^2 - 4ac = -47$. Como el coeficiente del primer término, $a = -2$, es negativo, el trinomio será siempre negativo, y la inecuación dada no podrá verificarse para ningún valor de x.

Cuando se trata de resolver una INECUACIÓN FRACCIONARIA, *se comienza siempre por transformarla en otra equivalente que tenga una de las formas* $\frac{A}{B} \gtrless 0$; *luego, se multiplican los dos miembros por* B^2 *y se resuelve la inecuación así obtenida.*

El multiplicar por B^2 (que es siempre positivo), es con el fin de no alterar el sentido de la desigualdad al quitar denominadores, ya que, sin conocer x, no podemos precisar el signo del polinomio B.

EJEMPLO 3.° — *Resolver la inecuación* $\frac{x-2}{x+1} < 3$.

Se tiene:

$$\frac{x-2}{x+1} - 3 < 0 \quad \text{equivalente a} \quad \frac{-2x-5}{x+1} < 0$$

y multiplicando por $(x+1)^2$, resulta

$$(-2x-5)(x+1) < 0 \quad \text{o bien} \quad -(2x+5)(x+1) < 0$$

Multiplicando a los dos miembros por -1 y efectuando operaciones, se obtiene

$$2x^2 + 7x + 5 > 0; \quad \text{de donde,} \quad x < -\frac{5}{2} \quad \text{o bien} \quad x > -1.$$

EJERCICIOS

Descomponer en factores los siguientes trinomios:

622. $x^2 - x - 6$

623. $2x^2 + 2x - 3$

624. $x^2 + 2x + 5$

625. $-4x^2 + 2x + 15$

626. $-x^2 + 4$

627. $-x^2 + 3x - 4$

628. Indicar el intervalo en el cual son positivas o negativas las funciones correspondientes a los anteriores polinomios.

629. ¿Para qué valores de x tienen máximo o mínimo los trinomios siguientes? Calcular esos máximos o mínimos.

1. $x^2 - x - 6$
2. $-x^2 + 3x + 10$
3. $-x^2 + 2x - 1$
4. $x^2 - 6x + 5$
5. $x^2 + 2x - 8$
6. $-x^2 + 5x - 6$

Resolver las siguientes inecuaciones:

630. $x^2 > 3x - 4$

631. $-x^2 + 2x > -2$

632. $-x^2 + 4 > 0$

633. $3x^2 < 5x - 4$

634. $\frac{x-2}{x+5} > 1$

635. $\frac{x-3}{x+1} < 2$

36. Nociones de combinatoria

263. Análisis combinatorio. — Por *Análisis combinatorio* o *Combinatoria,* se entiende aquella parte del Álgebra que se ocupa del estudio y propiedades de los *grupos* que pueden formarse con *elementos dados* (números, letras u objetos), distinguiéndose entre sí por el *número* de elementos que entran en cada grupo, por la *clase* de estos elementos y por el *orden* de colocación.

Las agrupaciones formadas se llamarán *monarias, binarias, ternarias,* etc., según que entren en cada grupo uno, dos, tres, etc. elementos.

El número de elementos de que disponemos se llama *base* de la agrupación, y el de los que entran en cada grupo, *grado* u *orden* de la misma. Así, diremos: agrupaciones monarias o de primer grado, binarias o de segundo grado, etc.

Los *m* elementos de que se dispone para formar los grupos pueden ser todos distintos o bien puede haber algunos iguales. En el primer caso, los grupos formados se llaman *ordinarios;* los formados en el segundo supuesto, se llaman *agrupaciones con repetición.* Nos ocuparemos sólo de las agrupaciones ordinarias.

Las agrupaciones que estudia la *Combinatoria* son de tres clases: *Variaciones, permutaciones* y *combinaciones.*

264. Variaciones. — *Llamamos variaciones de* m *objetos tomados* n *a* n, *a los diferentes grupos que con ellos se pueden formar, de tal modo, que en cada grupo entren* n *objetos, y que un grupo se diferencie de los otros, bien en alguno de los objetos, o bien en el orden de colocación de los mismos.*

Las variaciones monarias con *m* elementos se representan por el símbolo V_m^1 las binarias por V_m^2 las ternarias por V_m^3 y, en general, las de orden *n,* por V_m^n

265. Formación ordenada de las variaciones. — Supongamos, por ejemplo, cuatro elementos, a_1, a_2, a_3 y a_4, y veamos cómo ha de procederse para obtener las variaciones de los distintos órdenes que con ellos pueden formarse.

Las variaciones monarias, o de orden 1, serán los mismos elementos:

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4$$

Para formar los grupos o variaciones binarias, se escribirán sucesivamente a derecha de cada monaria los restantes elementos:

a_1a_2,	a_1a_3,	a_1a_4	a_3a_1,	a_3a_2,	a_3a_4
a_2a_1,	a_2a_3,	a_2a_4	a_4a_1,	a_4a_2,	a_4a_3

Entre éstas no hay ninguna repetida, pues las de la misma fila se diferencian en el último elemento, y las de distinta fila, en el primero.

Las variaciones ternarias se formarán poniendo a la derecha de cada binaria, uno a uno, los elementos restantes:

$a_1a_2a_3$,	$a_1a_2a_4$,	$a_1a_3a_2$,	$a_1a_3a_4$,	$a_1a_4a_2$,	$a_1a_4a_3$
$a_2a_1a_3$,	$a_2a_1a_4$,	$a_2a_3a_1$,	$a_2a_3a_4$,	$a_2a_4a_1$,	$a_2a_4a_3$
$a_3a_1a_2$,	$a_3a_1a_4$,	$a_3a_2a_1$,	$a_3a_2a_4$,	$a_3a_4a_1$,	$a_3a_4a_2$
$a_4a_1a_2$,	$a_4a_1a_3$,	$a_4a_2a_1$,	$a_4a_2a_3$,	$a_4a_3a_1$	$a_4a_3a_2$

Las cuaternarias (último orden que puede formarse con los cuatro elementos dados) se formarán añadiendo a cada una de las ternarias el elemento que falta.

DEMOSTRACIÓN GENERAL. — Demostremos que, en general, las variaciones de un orden cualquiera se deducen de las del orden anterior, agregando a su derecha, uno a uno, los elementos restantes.

Para ello, supongamos formadas las variaciones de orden $n - 1$. Si a la derecha de cada variación de orden $n - 1$, escribimos, uno a uno, los $m - (n-1) = m - n + 1$ elementos que quedan, obtendremos así todas las variaciones de orden n. En efecto: las que provienen de la misma variación de orden $n - 1$ se diferencian en el elemento agregado, y las que proceden de variaciones distintas de orden $n - 1$ se diferencian, por lo menos, en aquello que diferencia a dichas variaciones.

Además, cualquier variación de orden n que podamos imaginar, se encontrará entre las que hemos obtenido, ya que si le suprimimos el último elemento, resultará una variación de orden $n - 1$, que figura entre las que nos han servido de punto de partida. Por consiguiente, dicha variación de orden n será una de las obtenidas al agregar a la de orden $n - 1$ los elementos que no figuran en ella, y entre éstos, el suprimido.

266. Fórmula del número de variaciones. — Dada la manera cómo se han formado las variaciones de orden n, resulta que cada variación de orden $n-1$ ha dado origen a $m-n+1$ variaciones de orden n. Por tanto, el número de variaciones de orden n será

$$V_m^n = V_m^{n-1} \times (m-n+1) \qquad [1]$$

Dando a n los valores 2, 3, ..., n, y recordando además que $V_m^1 = m$, tendremos:

$$V_m^1 = m$$
$$V_m^2 = V_m^1(m-1)$$
$$V_m^3 = V_m^2(m-2)$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$V_m^n = V_m^{n-1}(m-n+1)$$

Multiplicando ordenadamente las anteriores igualdades y simplificando, resulta

$$V_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$$

fórmula fácil de expresar en lenguaje corriente, diciendo:

El número de variaciones de m *elementos, tomados* n *a* n, *es igual a un producto de* n *factores decrecientes de unidad en unidad, siendo* m *el primer factor.*

EJEMPLO. — Determinar el número de variaciones que pueden formarse con 8 elementos tomados 5 a 5.

$$V_8^5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6.720$$

OBSERVACIÓN. — Si en la fórmula [1] hacemos $n = 1$, tendremos:

$$V_m^1 = V_m^0 \times (m-1+1) = V_m^0 \times m$$

Por *convenio* se atribuye al símbolo V_m^0 el valor 1. Según esto, resulta:

$$V_m^1 = V_m^0 \times m = 1 \times m = m$$

como sabíamos ya por otra parte.

267. Permutaciones. — *Dados* m *objetos, llamaremos permutaciones a las variaciones de esos* m *objetos tomados* m *a* m, *es decir, a los diversos grupos que con ellos pueden formarse, de modo que entrando* m *en cada grupo, se diferencie un grupo de otro solamente en el orden de colocación de los objetos.*

De la definición se deduce que las permutaciones no son sino variaciones en las que entran todos los elementos considerados. Es decir: si designamos por P_m el número de permutaciones que se pueden formar con m elementos, podremos escribir que $P_m = V_m^m$.

268. Formación ordenada de las permutaciones. — De ordinario se emplea el siguiente procedimiento:

Consideremos los cuatro elementos a_1, a_2, a_3, a_4.

Con los dos primeros, se pueden formar únicamente

$$a_1a_2 \quad \text{y} \quad a_2a_1$$

Tomando el tercer elemento a_3 y colocándole en todos los lugares posibles respecto de cada una de las permutaciones anteriores, es decir, a derecha, en medio y a izquierda, se obtienen las ternarias

$$a_1a_2a_3, \quad a_1a_3a_2, \quad a_3a_1a_2 \qquad a_2a_1a_3, \quad a_2a_3a_1, \quad a_3a_2a_1$$

y si ahora agregamos el elemento a_4 a cada una de las permutaciones ternarias, y hacemos que ocupe los lugares 4.°, 3.°, 2.° y 1.°, hallaremos las permutaciones con cuatro elementos

$$a_1a_2a_3a_4, \quad a_1a_2a_4a_3, \quad a_1a_4a_2a_3, \quad a_4a_1a_2a_3$$
$$a_1a_3a_2a_4, \quad a_1a_3a_4a_2, \quad a_1a_4a_3a_2, \quad a_4a_1a_3a_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En general, dadas las permutaciones de $m - 1$ elementos, si a cada una le añadimos un nuevo elemento y hacemos que vaya ocupando todos los lugares posibles, hallaremos las permutaciones con m elementos.

269. Número de permutaciones. — Por tratarse de un caso particular de las variaciones, la fórmula que nos dé el número de permutaciones con m elementos P_m, será

$$P_m = V_m^m = m(m-1)(m-2)\ldots(m-m+1) =$$
$$= m(m-1)(m-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

e invirtiendo el orden de los factores,

$$P_m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-2)(m-1)m$$

270. Factorial de un número natural. — Recordemos que *factorial de un número entero y positivo* n, *es el producto de* n *factores consecutivos, que comienzan en la unidad y terminan en* n.

Se representa indistintamente por $n!$ o por $\underline{|n}$.

EJEMPLO:

$$7! = \underline{|7} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5.040$$

Según esto, podremos decir que la fórmula de las permutaciones de m elementos es

$$P_m = m!$$

EJEMPLO. — Hallar el número de permutaciones que pueden formarse con 5 elementos.

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

NOTA. — La definición de factorial de un número entero no comprende los casos 0! y 1!. Para completarla, *admitiremos* que

$$0! = \underline{|0} = 1 \qquad \text{y} \qquad 1! = \underline{|1} = 1.$$

271. Inversiones de una permutación. — Suponiendo m elementos, entre los que se considera un determinado *orden de sucesión* (el alfabético, si se trata de letras; el de la serie natural cuando son números o una letra afectada de subíndices numéricos), llamamos PERMUTACIÓN PRINCIPAL aquella en que los elementos están en el orden considerado.

Según esto, decimos que dos elementos de una permutación forman $\left\{\begin{matrix}\textit{sucesión}\\ \textit{inversión}\end{matrix}\right\}$ si, prescindiendo de los demás, están $\left\{\begin{matrix}\textit{en el mismo orden}\\ \textit{en orden contrario}\end{matrix}\right\}$ que en la permutación principal.

Para hallar las inversiones de una permutación, compararemos cada elemento con todos los que le siguen.

Así, por ejemplo, si *a b c d e* es la permutación principal, en *d c b a e* tendremos: *d* con *c*, inversión; *d* con *b*, inversión; *d* con *a*, inversión; *d* con *e*, sucesión; *c* con *b*, inversión; *c* con *a*, inversión; *c* con *e*, sucesión; *b* con *a*, inversión; *b* con *e*, sucesión; *a* con *e*, sucesión. En total hay 6 inversiones.

272. Clase de una permutación. — Si el número de inversiones que tiene una permutación es par, se dice de esa permutación que es de *clase par;* y si el número de inversiones es impar, se dice de la permutación que es de *clase impar.*

Según esto, la permutación $a_2a_1a_4a_3$ es de clase par.

No es difícil demostrar el siguiente teorema: *Entre las* m! *permutaciones que se pueden formar con* m *elementos, hay tantas pares como impares.* Intente el alumno hacerlo.

EJERCICIOS

Calcular:

636. *a)* V_7^3 *b)* P_5

637. *a)* P_9 *b)* V_{10}^2

638. *a)* V_9^8 *b)* P_6

639. Formar las variaciones (sin repetición) binarias y ternarias que se pueden formar con las letras *h, k, l, m.*

640. Escribir los tres primeros y los tres últimos factores del desarrollo de las siguientes expresiones:

a) V_{m+1}^n *b)* V_{m+1}^{n-1} *c)* V_{m+1}^{n+1} *d)* V_{m+3}^n *e)* V_{m+3}^{n+1} *f)* V_{m+2}^{n-2}

641. Calcular el valor de n en la ecuación $V_8^n = 4V_8^{n-1}$

642. Escribir todos los números de dos y tres cifras (ordenados de menor a mayor) que se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, sin que haya ninguna repetida.

643. Escribir (en orden creciente) las permutaciones que se pueden formar con los siguientes grupos de elementos:

a) 1, 2, 3; *b)* 7, 8, 9; *c)* 3, 4, 5, 6; *d)* a_1, a_2, a_3

644. Escribir todas las permutaciones que se pueden formar con las letras de la palabra *caso.* Subrayar las que tienen significado en español.

645. ¿Cuántos números de cinco cifras (sin que haya ninguna repetida) se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, 4 y 5? ¿Cuántos de esos números tienen el 3 en un lugar cualquiera, el tercero por ejemplo?

646. ¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse con las nueve significativas del sistema decimal, siendo distintas entre sí las que entren en cada número?

647. Hallar la suma de los números a que se refiere el ejercicio anterior.

648. En un banco hay sentadas seis personas. Variando el orden de puestos, ¿de cuántas maneras pueden colocarse?

649. ¿Cuántos números distintos pueden formarse con las cuatro cifras, 2, 3, 5 y 8, suponiendo que en cada uno entran todas ellas sin repetirse ninguna?

650. ¿De cuántas maneras podrán colocarse en fila 10 alumnos, si suponemos que hay dos que ocupan siempre el mismo puesto, uno el primero y otro el último?

651. Una línea de ferrocarril tiene 25 estaciones. ¿Cuántos billetes distintos habrá que imprimir, si cada billete lleva impresas las estaciones de origen y destino?

652. En un concurso literario hay asignados 3 premios distintos para los 3 mejores trabajos presentados. Si participan 12 concursantes, ¿de cuántas maneras puede hacerse la distribución de los premios?

653. Si $a_1a_2a_3a_4$ es la permutación principal, indicar la clase de las siguientes permutaciones:

a) $a_4a_2a_1a_3$ *b)* $a_2a_4a_1a_3$ *c)* $a_4a_1a_3a_2$ *d)* $a_1a_4a_3a_2$

37. Combinaciones

273. Combinaciones. — *Se llaman combinaciones de* m *elementos, tomados* n *a* n, *los diferentes grupos que se pueden formar con los* m *elementos, de modo que en cada grupo entren* n *de ellos, diferenciándose un grupo de otro, al menos en uno de sus elementos.*

Según se deduce de la definición, se consideran equivalentes los grupos formados por los mismos elementos, aunque estén colocados en orden distinto.

Para más comodidad, podemos suponer que en cada combinación los elementos se hallan colocados en un orden conveniente, que será el alfabético, si se trata de letras, o el creciente si son números.

El símbolo empleado para representar las combinaciones de m elementos, tomados n a n, es C_m^n

274. Formación ordenada de las combinaciones. — Establecido un cierto orden entre los elementos dados, formaremos las combinaciones monarias aislando dichos elementos. Supongamos que sean éstos las letras *a, b, c, d, e.* Las combinaciones monarias o de orden 1, serán:

$$a,\quad b,\quad c,\quad d,\quad e$$

Para formar las binarias, se escriben a la derecha de cada monaria, uno a uno, todos los elementos que sigan al último:

$$\begin{array}{llll} ab, & ac, & ad, & ae \\ bc, & bd, & be & \\ cd, & ce & & \\ de & & & \end{array}$$

Las ternarias se forman añadiendo a cada combinación binaria, uno a uno, todos los elementos que sigan al último:

$$\begin{array}{lll} abc, & abd, & abe \\ acd, & ace & \\ ade & & \\ bcd, & bce & \\ bde & & \\ cde & & \end{array}$$

Aplicando igual regla con las ternarias, obtendremos las cuaternarias:

a b c d, *a b c e*
a b d e
a c d e
b c d e

De orden quinto habrá una sola: *a b c d e*

En general, podremos enunciar: *Para formar las combinaciones con* m *elementos, tomados* n *a* n, *basta partir de las combinaciones de orden* n − 1 *y a la derecha de cada una colocar, uno a uno, los elementos que siguen al último de los que en ella entran.*

En efecto: añadiendo un elemento a un grupo de orden $n-1$ se obtiene otro de orden n.

Dos combinaciones así obtenidas se diferencian, bien en el último elemento (si procedían de la misma combinación), o por lo menos en alguno de los $n-1$ primeros (si provienen de dos combinaciones diferentes de orden $n-1$).

Por otra parte, si en una combinación cualquiera de orden n, se suprime el último elemento, resultará una de orden $n-1$, por lo que podemos afirmar que esa combinación es una de las obtenidas de la manera antes indicada.

275. Número de combinaciones. — Supongamos obtenidas todas las combinaciones posibles de m elementos, tomados n a n, número que hemos representado por C_m^n

Variemos el orden de colocación de las n letras que forman cada combinación; de este modo, cada *combinación* habrá dado origen a P_n *permutaciones*, y el conjunto de todos estos grupos de permutaciones constituirán las *variaciones* de los m objetos tomados n a n; luego

$$C_m^n \times P_n = V_m^n$$

de donde se deduce

$$C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n}$$

y teniendo en cuenta los valores de V_m^n y P_n resulta

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

siendo, en todo caso, $1 \leqq n \leqq m$.

EJEMPLO. — Hallar el número de combinaciones que pueden formarse con 20 elementos, tomados 3 a 3.

$$C_{20}^{3} = \frac{V_{20}^{3}}{P_3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1.140$$

276. Números combinatorios o coeficientes binómicos. — La importancia que tienen en el cálculo los números representados por C_m^n hace que se les denomine *números combinatorios.* También se les llama *coeficientes binómicos,* y suelen representarse por la notación $\binom{m}{n}$ que se lee «*m* sobre *n*».

Es decir, que siendo *m* y *n* números naturales, recibe el nombre de número combinatorio o coeficiente binómico, *la fracción que tiene por numerador el producto de* n *factores que comienzan por* m *y van descendiendo de unidad en unidad, y por denominador el factorial de* n.

Así, $$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$$

A los números *m* y *n* se les designa por *índice superior* e *índice inferior,* respectivamente, del número combinatorio.

EJEMPLOS:

$$\binom{8}{5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 56 \qquad \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$$

FORMA FACTORIAL DE UN NÚMERO COMBINATORIO. — Si en la expresión

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots n}$$

multiplicamos por el mismo número a los dos términos de la fracción, resultará otra equivalente a la propuesta. El multiplicador que elegimos es $(m-n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-n)$, con lo que resulta:

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n!\,(m-n)!} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Según esto, podremos expresar el número de combinaciones de orden *n* que se pueden formar con *m* elementos, de esta manera:

$$C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Como consecuencia de esta nueva notación, podemos ampliar la definición de número combinatorio o coeficiente binómico a los casos especiales $\binom{m}{0}$, $\binom{0}{0}$ y $\binom{m}{1}$, *conviniendo* en que

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0!\,m!} = \frac{m!}{1 \times m!} = 1$$

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,0!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\binom{m}{1} = \frac{m!}{1!(m-1)!} = \frac{m\,(m-1)!}{1\,(m-1)!} = m$$

277. Propiedades de los números combinatorios. — 1.ª *Dos coeficientes binómicos son iguales si tienen igual el índice superior y la suma de los índices inferiores es igual al índice superior.*

Es decir, que

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

En efecto, basta observar que

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

$$\binom{m}{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!\,(m-m+n)!} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$$

2.ª *La suma de dos números combinatorios con índices superiores iguales a* m *y los inferiores iguales a* n *y* n + 1, *respectivamente, es equivalente a un número combinatorio de índice superior* m + 1 *e inferior* n + 1.

Decimos que

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$$

En efecto:

$$\binom{m}{n} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$$

$$\binom{m}{n+1} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \cdot \frac{m-n}{n+1}$$

Sumando ordenadamente estas igualdades y sacando factor común a $\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}$, resulta:

$$\binom{m}{n}+\binom{m}{n+1}=\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}\left[1+\frac{m-n}{n+1}\right]=$$

(efectuando la suma indicada en el paréntesis mayor)

$$=\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}\cdot\frac{m+1}{n+1}=$$

$$=\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots n(n+1)}=\binom{m+1}{n+1}$$

como se quería demostrar.

OBSERVACIÓN. — Relacionando estas dos propiedades de los coeficientes binómicos con las combinaciones, podemos enunciarlas así:

1.ª *El número de combinaciones de* m *elementos, tomados* n *a* n, *es igual al número de combinaciones de los mismos elementos, tomados* m − n *a* m − n.

2.ª *El número de combinaciones de orden* n + 1 *con* m + 1 *elementos, es igual a la suma de las combinaciones de* m *elementos, de orden* n *y* n + 1.

278. Triángulo de Tartaglia (*). — Si escribimos los números combinatorios según la disposición siguiente:

$\binom{0}{0}$	1					
$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$	1	1				
$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$	1	2	1			
$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$	1	3	3	1		
$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$	1	4	6	4	1	
$\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$	1	5	10	10	5	1
... ...						

(*) *Nicolás* TARTAGLIA, matemático italiano (1505-1557).

tendremos que, en virtud de la segunda propiedad, cada número resulta ser la suma del que tiene inmediatamente encima con el situado a la izquierda de éste. Hemos obtenido así el llamado *triángulo aritmético de Tartaglia,* descubierto por este sabio italiano.

EJERCICIOS

654. Calcular: C_{12}^{3}, C_{9}^{5} y C_{13}^{4}

655. Comprobar las siguientes igualdades: $C_{5}^{3} = C_{5}^{2}$; $C_{7}^{4} = C_{7}^{3}$; $C_{9}^{6} = C_{9}^{3}$

656. Formar las combinaciones binarias, ternarias, cuaternarias y quinarias que pueden obtenerse con los elementos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

657. Distribuir las combinaciones ternarias del ejercicio anterior en dos grupos: 1.º, las que tienen el elemento a_1; 2.º, las que no lo tienen. Comprobar luego la igualdad $C_{4}^{2} + C_{4}^{3} = C_{5}^{3}$

658. ¿Cuántos grupos de a 5 se pueden formar con los 30 alumnos de una clase, en el supuesto de que un grupo se diferencia de otro por lo menos en un alumno?

659. ¿Cuántas rectas quedarán determinadas por 4 puntos de un plano, en el supuesto de que no hay más de dos en la misma recta?

660. ¿Cuántos planos distintos determinan 5 puntos en el espacio, suponiendo que no hay más de tres en el mismo plano?

661. En una avanzadilla hay 18 soldados. ¿Cuántas guardias diferentes de tres soldados cada una pueden formarse, y en cuántas entrará un soldado determinado?

662. Si $\binom{m}{3} : \binom{m-1}{4} = \frac{8}{5}$, hallar el valor de m.

663. Si $\binom{20}{n} = \binom{20}{n-10}$, calcular $\binom{18}{n}$

664. Probar que $n\binom{m}{n} = m\binom{m-1}{n-1}$

665. Hallar m, si $\binom{m}{6} = \binom{m}{3}$

666. Calcular por el procedimiento más corto $\binom{2000}{1998}$

38. Potencia del binomio

279. Primeras potencias de un binomio. Binomio de Newton o de Tartaglia. — Si calculamos por medio de multiplicaciones sucesivas las primeras potencias del binomio $x + a$, obtendremos los siguientes resultados, en los que se observa que los coeficientes coinciden con las filas del triángulo aritmético:

$$(x+a)^0 = 1 \qquad = \binom{0}{0}$$

$$(x+a)^1 = x + a \qquad = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}a$$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2 \qquad = \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xa + \binom{2}{2}a^2$$

$$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2a + \binom{3}{2}xa^2 + \binom{3}{3}a^3$$

. . . . . .

Se observa, además, que los exponentes de x van disminuyendo de unidad en unidad, desde la potencia dada hasta cero, mientras que los de a van aumentando en sentido inverso a los de x, a partir de cero.

La intuición nos hace pensar que esta ley de formación de las potencias de un binomio se cumple siempre, es decir, que cualquiera que sea el valor de m, podría escribirse:

$$(x+a)^m = \binom{m}{0}x^m + \binom{m}{1}x^{m-1}a + \binom{m}{2}x^{m-2}a^2 + \ldots + \binom{m}{m-1}xa^{m-1} + \binom{m}{m}a^m \quad [1]$$

De ser así, podríamos enunciar: El desarrollo de la potencia m-sima del binomio $x + a$:

1.° *Es un polinomio de* m + 1 *términos, homogéneo en* x *y* a, *de grado igual a* m, *completo, y ordenado con respecto a las potencias decrecientes de* x *y a las crecientes de* a.

2.° *Los coeficientes son números combinatorios de índice superior igual al exponente* m *de la potencia, y cuyos índices inferiores van creciendo de unidad en unidad, desde cero hasta* m.

La razón de haber llamado también coeficientes binómicos a los números combinatorios es precisamente ésta, ya que sirven de coeficientes en el desarrollo de la potencia de un binomio.

3.° *Los coeficientes de términos que equidistan de los extremos son iguales* (núm. 277, 1.ª propiedad). Según esto, sólo será necesario calcular la mitad de los coeficientes, si $m + 1$ es par; o uno más si $m + 1$ es impar. Los demás se repiten en orden inverso.

DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA. — El método que vamos a seguir se llama de *inducción completa*, y consiste en lo siguiente: *suponiendo que la ley o fórmula descubierta sea verdadera para* $(x+a)^m$, *probaremos que también lo es para la potencia siguiente* $(x+a)^{m+1}$. Una vez logrado esto, como ya hemos visto que la ley se cumple para las tres primeras potencias, se cumplirá para la cuarta; si se cumple para la cuarta, se cumplirá para la quinta, y así sucesivamente para todos los valores de m.

Supongamos, pues, que la fórmula [1] es verdadera. Para probar que también lo es para $m + 1$, bastará multiplicar por $x + a$ y ver si el resultado, que será el desarrollo de $(x+a)^{m+1}$, cumple la ley.

$$(x+a)^m = \binom{m}{0}x^m + \binom{m}{1}x^{m-1}a + \binom{m}{2}x^{m-2}a^2 + \ldots + \binom{m}{m}a^m \quad \times (x+a)$$

$$\binom{m}{0}x^{m+1} + \binom{m}{1}x^m a + \binom{m}{2}x^{m-1}a^2 + \ldots + \binom{m}{m}xa^m$$

$$\binom{m}{0}x^m a + \binom{m}{1}x^{m-1}a^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \binom{m}{m}a^{m+1}$$

$$(x+a)^{m+1} = \binom{m+1}{0}x^{m+1} + \binom{m+1}{1}x^m a + \binom{m+1}{2}x^{m-1}a^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \binom{m+1}{m+1}a^{m+1}$$

Hemos tenido en cuenta que:

$$\binom{m}{0} = \binom{m+1}{0}; \quad \binom{m}{1} + \binom{m}{0} = \binom{m+1}{1}; \quad \binom{m}{2} + \binom{m}{1} = \binom{m+1}{2} \text{ y } \binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1}$$

Como se ve, para el exponente $(m+1)$ la ley sigue cumpliéndose. Luego, la fórmula está demostrada para cualquier exponente natural. Esta

es la fórmula conocida impropiamente con el nombre de *binomio de Newton* (*).

EJEMPLOS:

$$(x+a)^6 = \binom{6}{0}x^6 + \binom{6}{1}x^5 a + \binom{6}{2}x^4a^2 + \binom{6}{3}x^3a^3 + \binom{6}{4}x^2a^4 + \binom{6}{5}xa^5 + \binom{6}{6}a^6 =$$

$$= x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + a^6$$

$$(3x^2+2y)^4 = (3x^2)^4 + 4(3x^2)^3 \cdot 2y + 6(3x^2)^2 \cdot (2y)^2 + 4 \cdot 3x^2 \cdot (2y)^3 + (2y)^4 =$$

$$= 81x^8 + 216x^6y + 216x^4y^2 + 96x^2y^3 + 16y^4$$

280. Producto de varios binomios con un sumando común. Otra deducción de la fórmula del binomio. — Vamos a intentar obtener una demostración más directa de la fórmula del binomio, que nos explique la presencia en ella de los números combinatorios.

En el producto

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots\ldots(x+a_m)$$

consideremos sucesivamente dos, tres, cuatro, etc. factores y comparemos los resultados. Tendremos:

$$(x+a_1)(x+a_2) = x^2 + (a_1+a_2)x + a_1a_2$$

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3) = x^3 + (a_1+a_2+a_3)x^2 + (a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)x + a_1a_2a_3$$

... ...

Cualquiera que sea el número de factores binomios considerados, veríamos que, una vez ordenado el producto según las potencias decrecientes de x, en todos los resultados se cumple la siguiente ley:

1.° *El primer término es* x *afectado de un exponente igual al número de factores; en los demás términos, dicho exponente va disminuyendo de unidad en unidad.*

2.° *El coeficiente del primer término es* 1; *el del segundo, la suma de los segundos términos de los factores; el del tercero, la suma de los productos binarios o de dos factores que pueden formarse con los segundos términos; el del cuarto, la suma de los productos ternarios o de tres factores que se pueden formar con los segundos términos, y así sucesivamente.*

(*) *Isaac* NEWTON (1642-1727). Célebre físico y matemático inglés. En realidad, la fórmula del binomio se debe a *Tartaglia* (siglo XVI); lo que hizo Newton fue generalizarla para exponentes no enteros.

3.° *El último término es igual al producto de todos los segundos términos.*

Ahora bien: supongamos que en el producto

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots\ldots(x+a_m)$$

hacemos $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots\ldots = a_m = a$. Como consecuencia de esta suposición, resultará

$$(x+a)(x+a)(x+a)\ldots\ldots(x+a) = (x+a)^m$$

y en el desarrollo, los coeficientes experimentarán las siguientes transformaciones:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_m = ma = C_m^1 a$$
$$a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + \ldots = a^2 + a^2 + a^2 + \ldots = C_m^2 a^2$$
$$a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + \ldots = a^3 + a^3 + \ldots = C_m^3 a^3$$

Análogamente, tendremos que los restantes coeficientes serán C_m^4 C_m^5 ... etc. El último término, $a_1a_2a_3 \ldots a_m$, se transformará en $aaa \ldots = a^m$

Luego, en resumen, se podrá escribir:

$$(x+a)^m = x^m + C_m^1 x^{m-1}a + C_m^2 x^{m-2}a^2 + C_m^3 x^{m-3}a^3 + \\ + \ldots\ldots + C_m^n x^{m-n}a^n + \ldots\ldots + a^m$$

o, expresado de otro modo,

$$(x+a)^m = \binom{m}{0} x^m + \binom{m}{1} x^{m-1}a + \binom{m}{2} x^{m-2}a^2 + \\ + \ldots\ldots + \binom{m}{n} x^{m-n}a^n + \ldots\ldots + \binom{m}{m} a^m$$

El término

$$\binom{m}{n} x^{m-n}a^n \quad \text{o, también,} \quad \frac{m!}{(m-n)!\,n!} x^{m-n}a^n$$

se denomina *término general*, ya que de él se pueden obtener sucesivamente todos los del desarrollo, atribuyendo a n los valores 0, 1, 2, 3, 4, ... m.

281. Desarrollo de $(x-a)^m$. — Si hacemos negativo el segundo término del binomio, en el desarrollo, las potencias de $-a$ que tengan exponentes impares, serán negativas y harán que el término sea también negativo. Luego,

$$(x-a)^m = \binom{m}{0}x^m - \binom{m}{1}x^{m-1}a + \binom{m}{2}x^{m-2}a^2 - \ldots \pm \binom{m}{m-1}xa^{m-1} \mp \binom{m}{m}a^m$$

Como se ve, en este desarrollo, los términos son alternativamente positivos y negativos; el primero es siempre positivo.

282. Relaciones entre los coeficientes binómicos. — Si hacemos $x = a = 1$ en $(x+a)^m$ y $(x-a)^m$, sólo aparecerán los coeficientes binómicos en su desarrollo, y se tendrá:

$$(1+1)^m = 2^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{m-1} + \binom{m}{m}$$

o sea, que *la suma de los coeficientes del desarrollo de la potencia* n-*sima de un binomio es igual a* 2^m.

$$(1-1)^m = 0^m = \binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \ldots \pm \binom{m}{m-1} \mp \binom{m}{m}$$

o sea, que *la suma de los coeficientes de lugar par es igual a la suma de los que ocupan lugar impar.*

283. Cuadrado de un polinomio. — Dado un polinomio, siempre es posible considerarle como suma de dos expresiones, una de las cuales sea el primer término, y la otra, los términos restantes. Aplicando luego cuantas veces sea preciso la fórmula del cuadrado de un binomio, tendremos el del polinomio en cuestión.

EJEMPLO. — *Hallar el cuadrado de* a + b + c + d

Si hacemos $b + c + d = s$ y $c + d = t$, resulta:

$$(a+b+c+d)^2 = (a+s)^2 = a^2 + 2as + s^2 = a^2 + 2a(b+c+d) + s^2 \qquad [1]$$

Ahora bien:

$$s^2 = (b+c+d)^2 = (b+t)^2 = b^2 + 2bt + t^2 = b^2 + 2b(c+d) + (c+d)^2$$

por lo que, sustituyendo en [1] y haciendo operaciones, se obtiene en definitiva:

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2 + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

Podríamos razonar de igual modo con otro polinomio cualquiera; de ahí que digamos: *El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de todos sus términos, más el duplo de cada uno de los productos binarios que pueden obtenerse con esos mismos términos.*

EJERCICIOS

Desarrollar las siguientes potencias y simplificar:

667. $(a^2-3b)^4$ **668.** $(5+y^3)^3$ **669.** $\left(\frac{r^2}{t}+s\right)^4$ **670.** $\left(\frac{x^2}{a}-\frac{a^3}{x}\right)^5$

Obtener, en la forma más sencilla, los cuatro primeros términos del desarrollo de:

671. $(a+5b)^{10}$ **674.** $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{10}$ **677.** $\left(\frac{3a}{x^2}-\frac{x}{2c^2}\right)^{16}$

672. $\left(\frac{x}{3}-y^2\right)^{12}$ **675.** $\left(\frac{a}{b^2}+5\right)^{18}$ **678.** $\left(\frac{\sqrt{a}}{x}-\frac{\sqrt{x}}{a}\right)^{12}$

673. $(b^2-4ac)^{15}$ **676.** $\left(\frac{2x}{y}-\frac{3y}{x}\right)^{14}$

Calcular:

679. El 4.º término de $(1+x)^{12}$

680. El 6.º término de $(2x+3y)^{10}$

681. El 5.º término de $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{10}$

682. El término medio de $(x^2-y^3)^{18}$

683. El término medio de $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{24}$

684. El término medio de $\left(a-\frac{1}{a}\right)^{16}$

Hallar el término que contiene:

685. y^2, en el desarrollo de $(2x^2+5y)^6$

686. a^{15}, en el desarrollo de $(a^3-2ab^2)^9$

Calcular las potencias siguientes, de números complejos:

687. $(2+i)^6$ **688.** $(3-2i)^5$ **689.** $(7+\sqrt{2}\,i)^4$

Hallar el cuadrado de los siguientes polinomios:

690. $x+y+z$ **691.** $3a-2b+\frac{1}{2}c$ **692.** $\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}$

693. x^3+x^2+x+1 **694.** $2a+2b+2m+2n$

39. Frecuencia y probabilidad

284. Noción de frecuencia. — Para estudiar estadísticamente un hecho o un fenómeno cualquiera se requiere como elemento esencial recoger y clasificar los *datos* referentes al mismo.

Llamamos *serie estadística* a un determinado número de datos recogidos experimentalmente como resultado de repetidas observaciones. Se denomina *población, colectivo* o *universo* al conjunto del cual se han extraído los números que componen la serie estadística.

La población o colectivo puede ser *finito* o *indefinido*, según sea finito o indefinido el conjunto de que se trata. Si de todo el conjunto que compone el colectivo, separamos al azar un determinado número de cosas o elementos, tendremos lo que se llama una *muestra*. Generalmente se dispone en la práctica de muestras, y sólo téoricamente podemos operar con colectivos.

EJEMPLO. — Supongamos que en la tabla adjunta se dan las notas obtenidas en la última quincena por 12 alumnos cualesquiera de entre los que componen la población escolar de Quinto curso, de Zaragoza. En ese caso, la referida tabla constituirá una MUESTRA; y si dispusiéramos de las notas correspondientes a la pasada quincena, de todos los estudiantes de Zaragoza que cursan Quinto año, tendríamos un COLECTIVO, que aquí es finito.

TABLA I

ALUMNOS	1.º	2º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º	11.º	12.º
Religión	8	7	6	7	6	6	9	6	6	9	5	6
Ciencias Naturales	7	6	6	6	6	4	10	7	6	7	3	7
Matemáticas	7	7	6	6	5	3	9	3	4	8	4	7
Química	9	8	6	6	3	5	10	4	4	8	5	6
Idioma Moderno	8	6	7	8	4	5	10	6	5	8	5	6
Dibujo	9	5	6	7	6	7	10	5	5	7	8	6
F. Espíritu Nacional	7	7	4	8	6	5	9	6	5	9	5	6

Denominaremos FRECUENCIA ABSOLUTA *al número de veces que aparece un dato en una muestra o en un colectivo.* Así, diremos que la frecuencia absoluta de la puntuación 6 en la muestra anterior es 25.

Si hemos arrojado una moneda al aire 150 veces y ha quedado en posición *cara* 69 veces y 81 en posición *cruz*, diremos que la frecuencia absoluta de cara ha sido 69, y la de cruz, 81.

Aunque la frecuencia absoluta nos da una idea poco clara de la *distribución de frecuencias*, ella constituye ya un primer elemento para la ordenación de las series estadísticas, es decir, para indicarnos cómo se presenta el hecho o suceso. Más segura resulta esta ordenación cuando se hace a base de la llamada FRECUENCIA RELATIVA, *que es el cociente de dividir la frecuencia absoluta por el número total de datos considerados.*

EJEMPLO. — Supongamos que como resultado de echar al aire 100 veces un dado se han anotado los siguientes datos: el 1 ha aparecido 13 veces; el 2, 19; el 3, 18; el 4, 16; el 5, 20, y el 6, 14. Tendríamos:

CLASES DE DATOS	FRECUENCIAS ABSOLUTAS	FRECUENCIAS RELATIVAS
1	13	13 : 100 = 0'13
2	19	19 : 100 = 0'19
3	18	18 : 100 = 0'18
4	16	16 : 100 = 0'16
5	20	20 : 100 = 0'20
6	14	14 : 100 = 0'14
TOTALES	100	1'00

Reparemos en que la suma de frecuencias absolutas es igual al número de datos anotados, y que la suma de frecuencias relativas es igual a la unidad.

En el caso antes considerado de la moneda echada al aire, la frecuencia relativa de sacar cara será 69 : 150 = 0'46, y la de sacar cruz, 81 : 150 = 0'54.

285. Noción de probabilidad. — A medida que aumenta el número de datos de un colectivo, las frecuencias relativas tienden a estabilizarse alrededor de un número fijo, que constituye la llamada *probabilidad de realización del suceso.*

Podemos llegar también a este concepto de probabilidad razonando de otro modo. Volvamos al caso de la moneda. Cada vez que la arrojamos al aire, lo mismo puede salir cara que cruz, y como esto sucede todas las veces, decimos que es igualmente probable que salga cara que cruz, o sea, que la probabilidad es la misma. Como la suma de probabilidades de cara y cruz es la unidad, la correspondiente a cada una será $\frac{1}{2}$.

Si suponemos el caso del dado, al arrojarlo al aire se dan seis posibilidades, todas ellas equiprobables, a saber: que salga el 1, el 2, el 3, el 4, el 5 o el 6. Luego, la probabilidad de cada una será 1/6.

En general, la probabilidad de un suceso que se presenta en C_f casos favorables sobre C_p casos posibles, se hallará por el cociente

$$p = \frac{C_f}{C_p}$$

DEFINICIÓN. — *La probabilidad de un suceso es igual al cociente entre el número de casos favorables y el número total de casos posibles, siempre que todos estos casos sean igualmente probables.*

EJEMPLO. — Si en una clase de 30 alumnos, el profesor pregunta en cada sesión a 10 sacados por sorteo, la probabilidad de que un alumno determinado sea interrogado, es

$$p = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

Si un suceso se presenta siempre, su probabilidad es *uno* y decimos de él que es *seguro;* si no se presenta nunca, su probabilidad es *cero* y decimos de él que es *imposible.* Un suceso será simplemente *probable* cuando su probabilidad esté comprendida entre 0 y 1. Atendiendo a la fórmula

$$p = \frac{C_f}{C_p} \quad \text{será} \quad \begin{cases} C_f = C_p, & \text{si el suceso es cierto} \\ C_f = 0, & \text{si el suceso es imposible} \end{cases}$$

Cuando los casos que pueden presentarse son sólo dos, los sucesos se llaman *contrarios,* y si la probabilidad de uno de ellos es p, la del otro será q, de modo que resulte $p + q = 1$; de donde, $q = 1 - p$.

286. Probabilidades totales. — La probabilidad de que hemos hablado anteriormente se llama *probabilidad simple.* A veces hay que estudiar sucesos más complejos que dan lugar a la *probabilidad total* y a la *probabilidad compuesta.*

Probabilidad total es la de un suceso que puede producirse bajo la acción de varias causas o hipótesis. Cuando estas causas o hipótesis se excluyen mutuamente, la probabilidad de que se verifique el suceso es

igual a la suma de las probabilidades parciales que se obtienen atendiendo a cada una de las referidas causas o hipótesis.

Designando por P a la probabilidad total y por p_1, p_2, p_3, ..., p_n a las probabilidades parciales, ha de verificarse que

$$P = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n$$

En efecto: supongamos el siguiente

EJEMPLO. — ¿Qué probabilidad hay de sacar indistintamente un as o una figura al levantar una carta en una baraja de 48 cartas?

Razonaremos así: La probabilidad de sacar as es $\frac{4}{48}$, la de sacar figura es $\frac{12}{48}$; y la de sacar indistintamente as o figura, $\frac{4+12}{48}$, que como se ve es la suma $\frac{4}{48} + \frac{12}{48}$. Se cumple, pues, la ley enunciada, es decir, que

$$P = p_1 + p_2 = \frac{4}{48} + \frac{12}{48} = \frac{4+12}{48} = \frac{1}{3}$$

287. Probabilidades compuestas. — *Probabilidad compuesta es la de un suceso cuya realización depende de otros dos o más que han de realizarse sucesivamente.* Su principio o ley es el siguiente: *La probabilidad de un suceso dependiente de otros dos o más que han de realizarse sucesivamente, es igual al producto de las probabilidades de cada uno de ellos.* Es decir, ha de verificarse que

$$P = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_n$$

En efecto: supongamos el siguiente

EJEMPLO. — En una urna en la que hay 100 bolas, 18 son negras, 15 rojas, 23 verdes y el resto blancas. ¿Qué probabilidad hay de sacar primero una bola roja y luego una verde en dos extracciones sucesivas?

Hemos de distinguir dos casos: 1.º Que la extracción sea *con reemplazamiento*, es decir, que la primera bola extraída sea devuelta a la urna. 2.º Que la extracción sea *sin reemplazamiento*, es decir, que la primera bola extraída no sea devuelta a la urna, con lo que quedará una bola menos para la segunda extracción.

Primer caso. Cada una de las 15 bolas rojas se puede aparear con cada una de las 23 verdes, por lo que habrá 15×23 casos favorables. Los casos posibles serán 100×100, ya que cada una de las 100 bolas se puede juntar con cada una de esas mismas 100 bolas. La probabilidad buscada será, por tanto,

$$P = \frac{15 \times 23}{100 \times 100} = \frac{15}{100} \times \frac{23}{100} = p_1 \cdot p_2 = 0'0345$$

Segundo caso. Si la bola primeramente extraída no es devuelta a la urna, los casos probables seguirán siendo 15×23, pero los posibles serán ahora 100×99, por lo cual la probabilidad pedida será:

$$\frac{15 \times 23}{100 \times 99} = \frac{15}{100} \times \frac{23}{99}$$

El primer factor es la probabilidad de sacar una bola roja, mientras que el segundo no es ya la probabilidad de sacar una bola verde, sino una probabilidad *modificada* por el primer suceso. Al aplicar el principio antes enunciado, hay que tener en cuenta, pues, que las probabilidades de los distintos sucesos pueden ser modificadas por la presentación de los demás.

OBSERVACIÓN. — En el ejemplo, se ha especificado que deseábamos hallar la probabilidad de sacar primero una bola roja y luego una verde; si el orden de presentación hubiera sido indiferente, es decir, si sólo nos interesara una bola de cada color, la probabilidad entonces sería el doble, según el principio de las probabilidades totales.

Por los ejemplos anteriores, podemos ver que la dificultad del cálculo de probabilidades estriba en saber *contar* debidamente los casos posibles y los casos probables, lo cual suele constituir un problema de Combinatoria.

288. Esperanza matemática. — *En los juegos de azar, se llama esperanza matemática de un jugador, a la suma de los productos de las ganancias previstas por las respectivas probabilidades de obtenerlas.*

EJEMPLO 1.º — Un jugador que recibe 3 ptas. por cada vez que sale cruz al arrojar una moneda al aire, juega con una esperanza matemática igual a

$$3 \cdot \tfrac{1}{2} = 1'5 \text{ ptas.}$$

EJEMPLO 2.º — Un jugador de dados que cobra tantos reales como puntos señale el dado al caer, tiene una esperanza matemática igual a

$$0'25 \cdot \tfrac{1}{6} + 2 \cdot 0'25 \cdot \tfrac{1}{6} + 3 \cdot 0'25 \cdot \tfrac{1}{6} + 4 \cdot 0'25 \cdot \tfrac{1}{6} + 5 \cdot 0'25 \cdot \tfrac{1}{6} + 6 \cdot 0'25 \cdot \tfrac{1}{6} = 0'875 \text{ ptas.}$$

Un juego de azar es *equitativo* cuando la cantidad arriesgada o puesta por cada jugador es igual a la esperanza matemática. Lo más frecuente es que tales juegos no sean equitativos, es decir, que lo que se paga por tomar parte en ellos es superior a la esperanza matemática, quedando por tanto beneficio para el organizador, como sucede en las rifas.

EJERCICIOS

695. Hallar la probabilidad de que al echar dos dados, la suma de los números que salgan sea 7.

696. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 1, 2, 3 ó 4 en una tirada de un dado?

697. Hallar la probabilidad de que al echar un dado salga un múltiplo de 2.

698. ¿Qué probabilidad hay de sacar cruz tirando al aire dos monedas?

699. En una urna hay 50 bolas, de ellas 10 son negras, 15 rojas, 9 verdes y el resto blancas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar bola de color (negra, roja o verde) en una extracción?

700. En una urna *A* hay 7 bolas blancas y 3 negras, y en otra, *B*, hay 6 blancas y 4 negras. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

1.º Sacar 2 bolas blancas, haciendo una extracción de cada urna.
2.º Sacar 3 bolas blancas, sacando dos de *A* y una de *B*.
3.º Sacar 4 bolas negras, sacando dos bolas de cada urna.

Todas las extracciones son con reemplazamiento.

701. ¿Qué probabilidad hay de que dos alumnos escriban por separado el mismo número con las tres cifras 3, 4 y 7.

702. ¿Qué probabilidad se tiene de sacar una suma superior a 7 al arrojar al aire dos dados?

703. Si echamos una moneda al aire cinco veces, ¿cuál es la probabilidad de que salga cara tres veces y cruz dos veces?

704. En una rifa de 20.000 números se sortean 400 premios. ¿Cuál es la probabilidad de obtener premio, si se han adquirido 25 números?

705. En una rifa de 1.000 números (del 0 al 999) se promete un premio de 150 pesetas al número premiado y 9 premios de 15 ptas. a los números cuyas dos últimas cifras coinciden con las del número premiado. ¿Con qué esperanza matemática se juega en esa rifa, y qué beneficio queda en cada número para el organizador, suponiendo que el número se vende a 0'50 pesetas?

40. Nociones de estadística

289. Gráficas de frecuencia absoluta y de frecuencia relativa. — Vimos (núm. 284) lo que se entiende por frecuencia absoluta y frecuencia relativa en una serie estadística; trataremos ahora de cómo se representan gráficamente.

Es sumamente útil la representación gráfica de una serie de datos numéricos, ya que con ello se logra una visión más clara y completa del fenómeno a que se refieren. Las gráficas son para los dirigentes de empresas lo mismo que las curvas de fiebre para los médicos: medios de comprensión e interpretación de los fenómenos.

Consideremos en primer término una serie estadística de carácter discontinuo, es decir, aquella en la que solamente se admiten unidades enteras indivisibles. Sea, por ejemplo, una serie formada por las puntuaciones obtenidas por 30 alumnos en la asignatura de Matemáticas:

7, 6, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 5, 9, 3, 4, 4, 7, 7,
6, 6, 5, 6, 4, 7, 6, 5, 8, 4, 6, 5, 5, 5, 6.

Clasificados los datos y hecho el recuento, se obtiene la Tabla I, llamada *tabla de distribución de frecuencias.* Las frecuencias absolutas son las veces que se hallan repetidas las distintas puntuaciones, y las frecuencias relativas son los resultados de dividir las frecuencias absolutas por 30, que es el total de puntuaciones.

TABLA I

PUNTUACIONES	FRECUENCIAS ABSOLUTAS (f)	FRECUENCIAS RELATIVAS ($f : N$)
3	1	0'03
4	4	0'13
5	7	0'23
6	10	0'34
7	5	0'17
8	2	0'07
9	1	0'03
Totales	$N = 30$	1'00

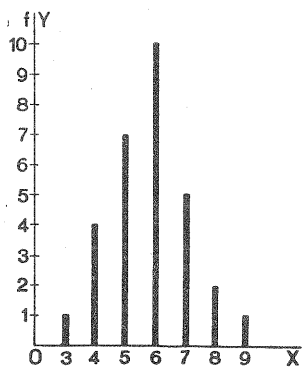


FIG. 147

En un par de ejes cartesianos, llevemos sobre el de abscisas las puntuaciones y sobre el de ordenadas las respectivas frecuencias absolutas.

Por cada uno de los puntos 3, 4, 5, etc., del eje de abscisas, tracemos un segmento de trazo lleno y grueso, perpendicular a OX y démosle una longitud igual a la correspondiente frecuencia. Hemos obtenido así la figura 147. Si quisiéramos hallar la gráfica de las frecuencias relativas, bastará tomar sobre el eje OY longitudes proporcionales a dichas frecuencias y proceder luego como antes hemos indicado.

OBSERVACIÓN. — No es conveniente unir los extremos de las barras en casos como el que hemos considerado, pues de lo contrario se daría la impresión de que en la serie existen valores intermedios a los representados.

290. Histogramas. — La representación gráfica de frecuencias en las series de carácter continuo, en las cuales los valores pueden considerarse tan próximos como queramos, se hace por medio de *histogramas*, es decir, *valiéndose de rectángulos contiguos, de base igual a cada uno de los intervalos que se toman en la serie, y de altura igual o proporcional a la frecuencia de esos intervalos.*

Supongamos, por ejemplo, que en un colegio se ha tallado a 100 alumnos de la clase de ingreso, y queremos obtener el histograma de frecuencias correspondiente a la serie de datos anotados.

Comenzaríamos por clasificar esos datos, agrupando luego las diferentes tallas en intervalos, por ejemplo, de 5 cm. y expresando sus respectivas frecuencias. Obtendríamos así la distribución de la Tabla II.

TABLA II

TALLAS EN CM.	FRECUENCIAS ABSOLUTAS (f)	FRECUENCIAS RELATIVAS ($f : N$)
125 a 130	2	0'02
130 a 135	13	0'13
135 a 140	21	0'21
140 a 145	32	0'32
145 a 150	25	0'25
150 a 155	7	0'07
Totales	$N = 100$	1'00

Los intervalos 125-130, 130-135, ..., se llaman *intervalos* o *marcas de clase*, y sus puntos medios, 127'5, 132'5, ..., *centros de los intervalos*. El número de alumnos que corresponde a cada intervalo es su frecuencia absoluta, y el cociente de dividir ésta por el total de alumnos ($N = 100$) es su frecuencia relativa.

Con los datos de la tabla a la vista, es fácil dibujar el histograma correspondiente. En el eje *OX* (fig. 148), tomemos una unidad y señalemos con relación a ella los puntos 125, 130, ..., límites de los intervalos. No hay necesidad de empezar por el 0, ya que el primer número de la serie es 125. Sobre el eje de ordenadas tomaremos asimismo una unidad, y con respecto a ella señalaremos las frecuencias absolutas.

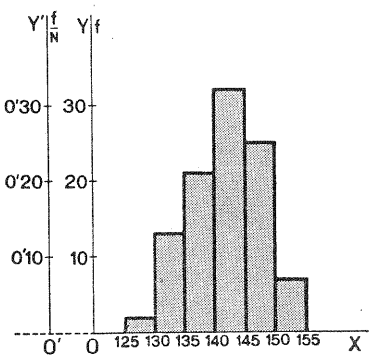


FIG. 148. — HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS

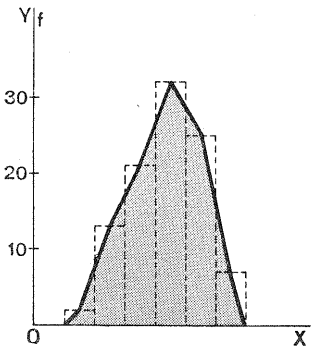


FIG. 149. — POLÍGONO DE FRECUENCIAS

Sobre cada intervalo de clase, se levanta luego un rectángulo cuya superficie sea igual o proporcional a la frecuencia absoluta (o relativa), con lo que habremos obtenido una figura como la 148, llamada histograma de frecuencias.

Para representar las frecuencias relativas sirve el mismo histograma, con solo cambiar la escala f del eje de ordenadas por la escala $f : N$ que figura a la izquierda.

Se denomina *polígono de frecuencias* (fig. 149), al formado uniendo los puntos medios de las bases superiores de los rectángulos del histograma. El polígono de frecuencias puede sustituir a veces a su correspondiente histograma.

OBSERVACIÓN. — Si en un histograma, tomamos como unidad de área la de un rectángulo cuyas dimensiones sean las unidades de longitud adoptadas en los ejes de coordenadas, se ve fácilmente que el área total de dicho histograma es precisamente igual a N (suma de frecuencias absolutas).

En el caso de que hayamos construído el histograma basándonos en las frecuencias relativas, el área total del mismo será igual a la unidad (suma de frecuencias relativas).

291. Caracterización numérica de una distribución. — Acabamos de ver la manera de representar gráficamente una serie estadística o distribución de frecuencias. Otro problema de la Estadística es el de encontrar un *número* que sirva para caracterizar y representar a toda la distribución, colectivo o muestra de que se trata. Dicho número deberá ser un promedio entre los dados; de ahí que reciba el nombre de centro o *media* de la distribución. Existen diversos promedios o medias *(media aritmética, media geométrica, media armónica, mediana* y *moda),* pero de todas ellas, la más importante y la más usada es la media aritmética.

La caracterización de una distribución se completa por la expresión numérica de la dispersión de los datos con respecto a la media. De entre las varias medidas de dispersión que pueden emplearse, estudiaremos únicamente la llamada *desviación típica.* Ambos valores, media y desviación típica, se denominan *números estadísticos.*

292. Media aritmética: su cálculo. — La media aritmética puede ser simple o ponderada.

Llamamos media aritmética simple de una serie compuesta de n *valores, al cociente de dividir por* n *la suma de dichos valores.*

Es decir: la media aritmética simple de v_1, v_2, v_3, ..., v_n, será

$$M_s = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n}{n} \qquad [1]$$

PROPIEDAD. — *La suma algebraica de las desviaciones de los valores de una serie con respecto a su media aritmética, es nula.*

Por desviación de un valor con respecto a la media aritmética, se entiende su diferencia con la media, es decir: $d = v - M_s$.

De la fórmula [1], se deduce:

$$M_s n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n$$

Pasando $M_s n$ al segundo miembro y teniendo en cuenta que $M_s n$ es igual a $M_s + M_s + M_s + \ldots$(n sumandos), resulta:

$$0 = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n - M_s - M_s - M_s - \ldots - M_s$$

O, escrito de otro modo:

$$(v_1 - M_s) + (v_2 - M_s) + (v_3 - M_s) + \ldots + (v_n - M_s) =$$
$$= d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_n = 0 \qquad [2]$$

como se quería demostrar.

La media aritmética simple no expresa debidamente en algunos casos el promedio.

Supongamos, por ejemplo, que en una fábrica los salarios de los obreros son 81, 120, 134 y 173 ptas. La media aritmética de los jornales será

$$(81+120+134+173):4 = 127 \text{ ptas.}$$

Ahora bien: únicamente en el caso de que haya el mismo número de obreros con cada uno de los salarios indicados, se podrá afirmar que 127 pesetas, es el salario medio.

Si, por el contrario, suponemos que en dicha fábrica hay 35 obreros cuyo jornal es de 81 ptas., 48 que cobran 120 ptas., 26 que cobran 134 ptas. y 11 que cobran 173 ptas., el verdadero jornal medio sería

$$\frac{35 \cdot 81 + 48 \cdot 120 + 26 \cdot 134 + 11 \cdot 173}{35 + 48 + 26 + 11} = 116'52 \text{ ptas.}$$

El promedio así hallado se llama *media aritmética ponderada*, cuya definición es como sigue:

Media aritmética ponderada de una serie de valores, es el resultado de multiplicar cada valor por su frecuencia respectiva y dividir luego la suma de los productos hallados por la suma de las frecuencias. O sea, designando, como de costumbre, por N a la suma $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n$, resulta:

$$M_p = \frac{v_1 f_1 + v_2 f_2 + v_3 f_3 + \ldots + v_n f_n}{N} \qquad [3]$$

En la media aritmética ponderada, se dice que v_1 figura en el promedio con *peso* o frecuencia f_1; v_2 con peso f_2, etc.

La igualdad [2], antes establecida, se transforma en esta otra, cuando nos referimos a la media aritmética ponderada:

$$f_1(v_1 - M_p) + f_2(v_2 - M_p) + \ldots + f_n(v_n - M_p) = \\ = f_1 d_1 + f_2 d_2 + f_3 d_3 + \ldots + f_n d_n = 0 \qquad [4]$$

293. El signo sumatorio Σ. — Cuando el símbolo $\sum_{i=1}^{i=n}$ (letra sigma mayúscula del alfabeto griego), afecta a una o más variables, como v_i, d_i, $v_i f_i$, $f_i d_i$, significa que ha de efectuarse la *suma* de los distintos términos que resultan al dar a i, sucesivamente, los valores comprendidos entre 1 y n, ambos inclusive. La notación $\sum_{i=1}^{i=n} v_i$ se lee «suma de v_i desde $i = 1$ hasta $i = n$».

Teniendo en cuenta el significado que hemos atribuido al signo sumatorio Σ, las fórmulas [1], [2], [3] y [4] pueden ir expresadas, respectivamente, así:

$$M_a = \frac{\Sigma v_i}{n}; \qquad \Sigma d_i = 0; \qquad M_p = \frac{\Sigma v_i f_i}{N}; \qquad \Sigma f_i d_i = 0$$

294. Dispersión. — La media de un colectivo o de una muestra nos proporciona ya una idea de sus características, pero en muchos casos esa idea resulta insuficiente.

Supongamos, por ejemplo, estas dos series de valores:

Serie A:	54,	21,	3,	8,	19,	62,	1,	48
Serie B:	25,	30,	28,	26,	29,	26,	27,	25

El promedio que corresponde a las dos series es 27 y, sin embargo, los valores de la una con respecto a los de la otra difieren bastante: los de la serie A se separan mucho de 27, mientras que los de la serie B conservan una mayor regularidad, alejándose poco del promedio.

Es preciso, pues, caracterizar más exactamente a las series estadísticas, añadiendo a la media una nueva determinación, que nos indique cómo varían los datos con respecto al promedio, es decir, su *dispersión.* Esta variación puede estudiarse desde diferentes aspectos, lo que da lugar a las llamadas *medidas de dispersión,* de las cuales la más importante es la *desviación típica.*

295. Desviación típica. Su cálculo. — A primera vista, parece que el procedimiento más rápido para medir la dispersión de una serie respecto a la media, debería ser hallar las desviaciones de los datos y calcular luego el promedio de esas desviaciones. Esto, sin embargo, no es posible, pues como hemos visto (fórmulas 2 y 4), la suma de las desviaciones, con respecto a la media, es igual a cero.

Ahora bien: la imposibilidad desaparece si consideramos no las desviaciones sino el cuadrado de las desviaciones, ya que entonces la suma no será nunca nula por tratarse de una suma de cuadrados; solamente se anularía en el caso de que todos ellos fueran nulos, es decir, cuando fueran iguales los datos de la serie.

Así, pues, suponiendo que los valores

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$$

aparecen en una serie con frecuencias

$$f_1,\ f_2,\ f_3,\ \ldots,\ f_n$$

la *dispersión* de dicha serie puede ir expresada por

$$\mu = \frac{f_1 (v_1 - M_p)^2 + f_2 (v_2 - M_p)^2 + \ldots + f_n (v_n - M_p)^2}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} =$$

$$= \frac{f_1 d_1^2 + f_2 d_2^2 + \ldots + f_n d_n^2}{N} = \frac{\Sigma f_i d_i^2}{N}$$

La raíz cuadrada de este valor μ, es decir, de la dispersión, es a lo que llamamos *desviación típica, desviación standard* o *desviación cuadrática media,* que suele designarse por la letra σ (sigma) del alfabeto griego. Según esto, tendremos:

$$\sigma = \sqrt{\frac{f_1 d_1^2 + f_2 d_2^2 + f_3 d_3^2 + \ldots + f_n d_n^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} f_i d_i^2}{N}}$$

EJEMPLO. — Calcular la *media* y la *desviación típica* de la distribución de frecuencias dada en la Tabla II.

Los datos y cálculos que se precisan los dispondremos del siguiente modo:

INTERVALOS	CENTROS DE LOS INTERVALOS v_i	FRECUENCIAS f_i	DESVIACIONES $d_i = v_i - M_p$	CUADRADOS DE LAS DESVIACIONES d_i^2	PRODUCTOS $f_i d_i^2$
125 a 130	127'5	2	−14'3	204'49	408'98
130 a 135	132'5	13	− 9'3	86'49	1.124'37
135 a 140	137'5	21	− 4'3	18'49	388'29
140 a 145	142'5	32	0'7	0'49	15'68
145 a 150	147'5	25	5'7	32'49	812'25
150 a 155	152'5	7	10'7	114'49	801'43
	$N = 100$ $M_p = \frac{\Sigma v_i f_i}{N} = \frac{14.180}{100} = 141'8$				$3.551'00 = \Sigma f_i d_i^2$

Luego, $M_p = 141'8$ y $\sigma = \sqrt{\frac{3.551}{100}} = 5'9$

EJERCICIOS

ALUMNOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Religión	7	6	5	6	6	6	10	6	9	9	6	10	6	7	7
Latín	6	5	5	5	6	4	8	5	6	7	4	6	5	6	6
Literatura	7	7	6	5	6	6	9	6	9	8	6	9	8	8	7
Historia	7	7	5	5	5	6	9	7	8	8	7	9	7	7	7
Matemáticas	6	4	5	4	3	8	9	6	8	8	6	9	8	5	8
Física y Química	5	6	5	4	4	8	9	6	7	7	7	8	7	6	7
Idioma	6	5	4	6	6	6	8	6	6	6	5	9	7	7	7

ALUMNOS	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Religión	8	7	6	7	4	9	8	9	9	8	6	8	6	6	9
Latín	7	7	4	4	3	9	5	8	7	6	6	6	5	6	7
Literatura	9	5	6	7	6	10	9	9	8	8	7	8	6	7	9
Historia	8	6	7	8	6	9	8	9	7	7	6	7	6	7	8
Matemáticas	9	8	6	6	4	10	5	9	9	8	3	7	7	6	8
Física y Química	7	7	6	6	5	10	5	9	8	8	4	8	6	6	8
Idioma	7	6	6	6	5	10	7	9	7	6	5	7	8	6	7

En la tabla anterior se dan las notas finales obtenidas por los 30 *alumnos que componían un Cuarto curso de Bachillerato. Se trata de construir la gráfica de* frecuencia absoluta *y de* frecuencia relativa *de la asignatura de:*

706. Matemáticas **707.** Física y Química

Con la misma tabla a la vista, hallar la media *y* la desviación típica *de:*

708. Religión **709.** Latín **710.** Literatura **711.** Historia

712. Matemáticas **713.** Física y Química **714.** Idioma

72	65	68	75	96	87	67	69	79	73
73	54	69	69	77	79	71	81	64	88
62	62	71	81	93	81	65	64	82	104
65	47	108	77	87	79	88	87	79	93
84	70	82	73	75	86	79	92	92	88
73	84	103	81	65	94	96	107	97	84
64	92	74	69	80	96	78	93	67	65
62	66	90	72	74	105	72	63	96	92
60	74	78	80	96	77	92	81	88	71
60	70	92	76	110	84	83	78	93	61

En el cuadro anterior figuran los jornales (en pesetas) de cada uno de los 100 *obreros que trabajan en una fábrica. Se trata de:*

715. Clasificar los valores (agrupando los jornales en intervalos de 10 ptas.) y expresar, en sendas columnas, las frecuencias absolutas y relativas.

716. Construir el histograma y el polígono de frecuencias.

717. Calcular la media y la desviación típica de la distribución.

41. Nociones de estadística (continuación)

296. Objeto de la Estadística matemática. — *Estadística es la ciencia que se ocupa de recoger, clasificar y caracterizar numéricamente grupos de datos referentes a diversos fenómenos, con el fin de prever o deducir posibles resultados.*

Así, por ejemplo, para estudiar el clima de una región, la Estadística recoge y clasifica datos referentes a la presión atmosférica, a la temperatura, a la lluvia, a la nubosidad, etc. De ellos podrá luego deducir: la temperatura media anual; las temperaturas extremas; el promedio anual de días de lluvia, despejados o nubosos; la cantidad máxima y mínima de agua recogida durante el año, etc.

Cuando se comparan medicamentos indicados para la misma enfermedad, la Estadística puede deducir el grado de eficacia de uno sobre los demás, analizando y caracterizando numéricamente los resultados de numerosas observaciones hechas en diversos grupos de enfermos.

Examinando los años vividos por un grupo muy numeroso de personas dedicadas a la misma profesión y en un ambiente semejante, se puede deducir la vida probable de una persona. Es decir que, obteniendo los números estadísticos (media y desviación típica) de la muestra formada por el grupo estudiado, se pueden inferir los correspondientes del colectivo o población. Las Compañías de Seguros se basan precisamente en esto al calcular las primas que han de abonar periódicamente los asegurados, no solamente para casos de fallecimiento, sino para toda otra clase de riesgos que puedan afectar a personas o cosas.

297. Distribución binomial. — Supongamos que en una urna hay h bolas blancas y l bolas negras, y hacemos m extracciones sucesivas de una bola cada vez. Las extracciones son con reemplazamiento. Si representamos por la letra B el suceso de sacar bola blanca y por N el de sacar bola negra, tendremos:

1) En la primera extracción se pueden presentar los sucesos B o N.

La probabilidad de sacar bola blanca es $p = \dfrac{h}{h + l}$

y la de sacar bola negra ..... $q = \dfrac{l}{h + l}$

La probabilidad total, o sea, la de sacar bola blanca o bola negra es

$$p + q = \frac{h}{h+l} + \frac{l}{h+l} = 1$$

2) Después de la segunda extracción, los posibles sucesos serán:

$$BB, \quad BN, \quad NB, \quad NN$$

En efecto: si en la primera extracción salió bola blanca, en la segunda también puede obtenerse blanca, con lo que se origina el suceso *BB*. Análogamente, si en la segunda extracción salió bola negra, se originará el suceso *BN*, etc.

Todos estos sucesos son de probabilidad compuesta, por lo que sus probabilidades respectivas serán:

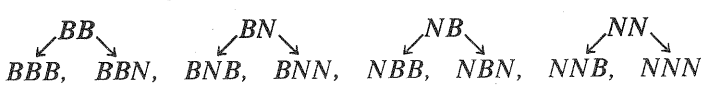
$$p^2, \quad pq, \quad qp, \quad q^2$$

Si no se especifica el orden en que han de aparecer las bolas, los sucesos *BN* y *NB* se consideran equivalentes, y, por tanto, su probabilidad es $2pq$.

La suma de estas probabilidades es, precisamente, el desarrollo de $(p+q)^2$. En efecto:

$$p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2 = 1$$

3) Los sucesos posibles después de la tercera extracción se deducen de los obtenidos en la segunda, tal como se representa en el siguiente esquema:



Agrupando los equivalentes de entre estos sucesos, se tiene:

$$BBB, \quad 3\,BBN, \quad 3\,BNN, \quad NNN$$

Sus probabilidades respectivas son:

$$p^3, \quad 3p^2q, \quad 3pq^2, \quad q^3$$

La probabilidad total o suma de estas probabilidades nos da:

$$p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = (p+q)^3 = 1$$

Siguiendo el mismo procedimiento obtendríamos la probabilidad total después de 4, 5, ..., m extracciones.

En general, para m extracciones, tendremos:

$$\binom{m}{0}p^m + \binom{m}{1}p^{m-1}q + \binom{m}{2}p^{m-2}q^2 + \ldots + \binom{m}{m}q^m = (p+q)^m = 1$$

Según esto, el suceso de sacar bola blanca 10 veces, por ejemplo, en 12 extracciones, viene representado por

BBBBBBBB BBNN

y el término del desarrollo que nos da su probabilidad es

$$P = \binom{12}{2}p^{10}q^2 \quad \text{o bien} \quad P = \binom{12}{10}p^{10}q^2$$

puesto que $$\binom{12}{2} = \binom{12}{10}$$

En general, la probabilidad de sacar n bolas blancas en m extracciones será

$$P = \binom{m}{n}p^n q^{m-n}$$

Análogamente, el suceso de sacar, por ejemplo, 8 veces bola negra en 12 extracciones, viene representado por

BBBBNNNNNNNN

y el término del desarrollo que nos da su probabilidad es

$$P = \binom{12}{8}p^4 q^8$$

En general, la probabilidad de sacar n bolas negras en m extracciones será

$$P = \binom{m}{n}p^{m-n}q^n$$

Vemos ahora por qué la distribución de probabilidades (o de frecuencias) cuya ley de formación se sujeta al esquema que hemos expuesto, recibe el nombre de *distribución binomial.*

EJEMPLO 1.º — En una bolsa tenemos 1 bola blanca y 5 bolas negras. Averiguar la probabilidad de sacar 2 bolas blancas y 5 negras en 7 extracciones.

Como aquí es $m = 7$, $n = 2$, $p = \frac{1}{6}$ y $q = \frac{5}{6}$, resulta:

$$P = \binom{7}{2} p^2 q^5 = \binom{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 21 \cdot 0'0278 \cdot 0'4009 = 0'2340$$

EJEMPLO 2.º — Hallar la probabilidad de obtener 4 caras al arrojar 5 veces al aire una moneda.

En este caso, $m = 5$, $n = 4$, $p = q = \frac{1}{2}$. Luego,

$$P = \binom{5}{4} p^4 q = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \binom{5}{4} \cdot \frac{1}{2^5} = 0'15625$$

298. Curva normal. — Si trazamos el histograma correspondiente a una distribución binomial $(p+q)^m$ y hacemos crecer a m, veremos que el contorno del polígono que se obtiene uniendo los puntos medios de las bases superiores de los rectángulos, se irá acercando cada vez más a una curva de forma acampanada (fig. 150), que recibe el nombre de *curva normal.*

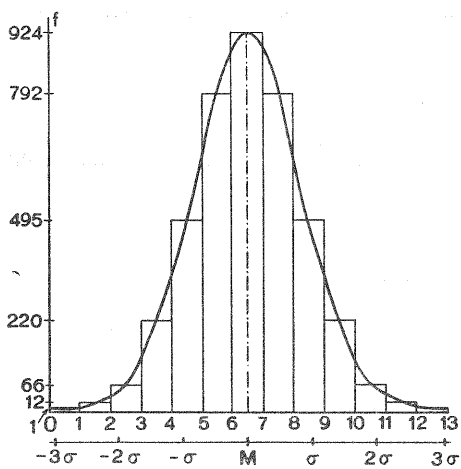


FIG. 150

Así, la figura 150 representa la adaptación de la curva normal al histograma de $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^{12}$. Dicho histograma ilustra la probabilidad de que salga 0, 1, 2, ..., 12 veces cara, al lanzar 12 veces una moneda al aire. Sobre el eje vertical se han tomado las frecuencias, que son los coeficientes del desarrollo $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^{12}$, y sobre el eje horizontal se han ido tomando sucesivamente los 13 términos de que consta el desarrollo; los intervalos 0-1, 1-2, etcétera, son las bases de los diferentes rectángulos del histograma.

299. Propiedades de la curva normal. — En la curva normal, que es el límite de los histogramas correspondientes a distribuciones binomiales, se dan las siguientes propiedades:

1.ª Es simétrica con respecto a la ordenada central, que es la correspondiente a la máxima frecuencia.

2.ª A medida que la curva se aleja del eje de simetría, las ordenadas disminuyen rápidamente, de tal modo que, si se toma el eje de simetría como eje de ordenadas, el área limitada por la curva y las ordenadas correspondientes a los puntos de abscisa:

$-\sigma$ y σ representa el 68 % del área total
-2σ y 2σ representa el 95 % del área total
-3σ y 3σ representa el 99'75 % del área total

en donde σ representa la desviación típica de la distribución. Esto significa que la casi totalidad de los valores se hallan en el intervalo $(-3\sigma, 3\sigma)$.

Cuando decimos que las tallas o los pesos de muchas personas del mismo país y de edades análogas, se distribuyen según la *ley normal*, queremos expresar que, aproximadamente, corresponderán tantas medidas por encima de la *media* como por debajo de la misma, y que la gráfica de la distribución será una curva acampanada.

En general, *si en un hecho o carácter influyen numerosas causas independientes entre sí, y cada una de ellas de efecto muy pequeño, los valores que expresan la medida de ese carácter suelen distribuirse según la ley normal.* Ocurre esto a menudo en estadísticas biológicas.

EJERCICIOS

718. Calcular la probabilidad de obtener 7 caras al lanzar 10 monedas al aire.

719. Calcular la probabilidad de obtener 0, 1, 2, 3, 4 y 5 cruces al echar al aire 5 monedas. Comprobar que la suma de esas probabilidades es igual a 1.

720. Si tomamos un dado y pintamos dos de sus caras de blanco y las restantes de negro, ¿cuál es la probabilidad de obtener 4 blancos y 6 negros al echar el dado 10 veces al aire? (Nótese que aquí $p = \frac{1}{3}$ y $q = \frac{2}{3}$).

721. Construir el histograma correspondiente a la distribución binomial $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^8$ y adaptarle luego la curva normal.

722. Tómense dos dados y échense al aire 100 veces, anotando en cada tirada el total de puntos. Ordénense los resultados obtenidos y constrúyase el histograma y el polígono de frecuencias. Hállese la media y la desviación típica. Véase si la distribución obtenida se asemeja a una distribución normal.

723. W. F. R. Weldon arrojó al aire 12 dados 4.096 veces. En cada prueba consideró como favorable la aparición de 4, 5 ó 6 puntos en uno cualquiera de ellos, y desfavorable la aparición de 1, 2 ó 3 puntos. Obtuvo este resultado:

Casos favorables (cada prueba)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Frecuencias	0	7	60	198	430	713	948	847	536	257	71	11	0

Estudiar si dicho resultado se ajusta bien a una distribución normal.

APÉNDICE

Ejercicios complementarios

I. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Resolver las siguientes ecuaciones y sistemas:

1. $2^x \cdot 3^x = 12 \cdot 18$

2. $4^x \cdot 5^{x-1} = 1600$

3. $4^{2x+1} = 8^{x+1}$

4. $3^{x+3} \cdot 5^{x-1} = 15^x \cdot 2^x$

5. $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$

6. $3^{2(x+1)} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$

7. $\sqrt[3]{a^{7-x}} = a^2$

8. $1'25^{-6} = \left(\frac{5}{4}\right)^{x+2}$

9. $\left(\frac{2}{7}\right)^5 = 3'5^{x+1}$

10. $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 960$

11. $\frac{2 \cdot 3^x - 5}{11} = -\frac{3^{x+1} - 4}{5} + 3^x - 5$

12. $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$

13. $(3 \cdot 10^x)^2 + (10^2)^x - 10^3 = 0$

14. $2^{x+2} = 0'5^{2x-1}$

15. $3^x + \frac{1}{3^{x-1}} = 4$

16. $(\sqrt{2})^x \sqrt{3} = 2^{x+1}$

17. $10^{x^2-11x+30} = (2 \cdot 5)^2$

18. $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 3 = 0$

19. $4^{x+1} + 64 \cdot 4^{-x} = 257$

20. $\begin{cases} 5^{x+y} = 25^3 \\ 5^{x-y} = 25 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 15 \cdot 5^{x-1} - 6^y = 339 \\ 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^{y+1} = 807 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3^{2x+y+1} \cdot 2^y = 7 \\ 2^{3x-y} \cdot 5^{x+2y} = 4 \end{cases}$

23. $\begin{cases} a^{x+y} = a^4 \\ a^{x-y} = a^2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^y = y^x \\ 29\,x = 18\,y \end{cases}$

25. $\log x = \log 2 + 2 \log (x-3)$

26. $\log \sqrt{7x+3} + \log \sqrt{3x+5} = 1 + \log 4'5$

27. $\frac{\log (35 - x^3)}{\log (5-x)} = 3$

28. $\frac{\log 2 + \log (11 - x^2)}{\log (5-x)} = 2$

29. $\log (x^2-1) - \log (x+1) = \log 5$

30. $\frac{1}{2} \log (x^2-4) + 2 \log (x+2) = \frac{1}{2} \log (x-2)$

31. $\begin{cases} x - y = 15 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$

32. $\begin{cases} \log x = \log 5\,y + \log 14 - \log 7 \\ x^2 = 20\,y^2 + 15\,x + 20 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

34. $\begin{cases} \log x + 3 \log y = 5 \\ \log \frac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$

35. $\begin{cases} 2\log x^2 - \log y^2 = 4 \\ 2\log x + \log y^2 = 2 \end{cases}$

36. $\begin{cases} \log(x+y) + \log(x-y) = \log 33 \\ e^x = \dfrac{e^{11}}{e^y} \end{cases}$

37. $\begin{cases} 2^{x-6} = 4^{\frac{1-y}{2}} \\ \log(x-y) = 0 \end{cases}$

38. $\begin{cases} 3x + y - \log z = 4 \\ 2x - y = 4 \\ y + \log z^2 = 1 \end{cases}$

39. $\begin{cases} \log x - \log y = \log 56 + \\ \qquad\qquad + \operatorname{colog} 20 \\ \log x + \log y = 1 + \log 7 \end{cases}$

40. $\begin{cases} (x+y)\log 2 = (x-y)\log 4 \\ xy \log 3 = \log 531441 \end{cases}$

II. Ecuaciones trigonométricas

Resolver las siguientes ecuaciones y sistemas:

1. $\operatorname{sen} 2x = \cos 60°$

2. $\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} x$

3. $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$

4. $2\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(45° - x)$

5. $\operatorname{sen}(x+45°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. $\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$

7. $\cos 2x - \cos 6x = \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x$

8. $\operatorname{tg}(x-45) + \operatorname{tg}(x+45) = 2\operatorname{cotg} x$

9. $\cos x \cos 2x + 2\cos^2 x = 0$

10. $\cos 2x + \operatorname{sen} x = 4\operatorname{sen}^2 x$

11. $\operatorname{tg} x \sec x = \sqrt{2}$

12. $2\operatorname{tg} x - 3\operatorname{cotg} x - 1 = 0$

13. $\operatorname{sen} 2x \cos x = 6\operatorname{sen}^3 x$

14. $\cos x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

15. $3\cos x = 4\sec x - 5$

16. $\cos 8x + \cos 6x = 2\cos 210° \cos x$

17. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{3} = \dfrac{\operatorname{tg} x}{4}$

18. $4\operatorname{tg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}$

19. $\dfrac{\operatorname{sen}(x+30°)}{\cos(x+60°)} = 1$

20. $4\operatorname{sen}\dfrac{x}{2} + 2\cos x = 3$

21. $4\operatorname{sen}(x-30°)\cos(x-30°) = \sqrt{3}$

22. $\log \operatorname{sen} x + \log \cos x = \log \frac{1}{2}$

23. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2}$

24. $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos y = \sqrt{2} \\ \operatorname{cosec} x + \sec y = 2\sqrt{2} \end{cases}$

25. $\begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) - \cos x \cos y = 0 \\ \operatorname{tg} y = 1 \end{cases}$

26. $\begin{cases} \operatorname{sen} x \cos y = \frac{3}{4} \\ \cos x \operatorname{sen} y = \frac{1}{4} \end{cases}$

27. $\begin{cases} \cos(x+y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x-y) = \frac{1}{2} \end{cases}$

28. $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$

29. $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1 \\ 2x + 2y = 180° \end{cases}$

30. $\begin{cases} \text{tg } x + \text{tg } y = 1 \\ \text{cotg } (x+y) = \frac{3}{4} \end{cases}$

31. $\begin{cases} \text{sen } x = \sqrt{2}\,\text{sen } y \\ \text{tg } x = \sqrt{3}\,\text{tg } y \end{cases}$

32. $\begin{cases} \text{sen } x + \text{sen } y = \dfrac{3}{2} \\ \cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

33. $\begin{cases} x + y = 50° \\ \text{tg } x + \text{tg } y = 0'934 \end{cases}$

Demostrar las siguientes identidades:

34. $\cos^4 a - \text{sen}^4 a = 2\cos^2 a - 1$

35. $\text{sen}^2 a - \cos^2 b = \text{sen}^2 b - \cos^2 a$

36. $(\text{cosec } a + \text{cotg } a)(\text{cosec } a - \text{cotg } a) = 1$

37. $(\text{tg } a + \text{cotg } a)\,\text{sen } a \cos a = 1$

38. $(\text{sen } a - \cos a)^2 + (\text{sen } a + \cos a)^2 = 2$

39. $\text{sen}^4 a - \cos^4 a = \text{sen}^2 a - \cos^2 a$

40. $(\cos a + \text{sen } a)^2 = \text{sen } 2a + 1$

41. $\text{tg } a + \text{tg } b = \text{tg } a\,\text{tg } b\,(\text{cotg } a + \text{cotg } b)$

42. $\dfrac{\text{sen } (a+b)}{\text{sen } (a-b)} = \dfrac{\text{tg } a\,\text{cotg } b + 1}{\text{tg } a\,\text{cotg } b - 1}$

43. $\dfrac{\text{tg } a + \text{tg } b}{\text{cotg } a + \text{cotg } b} = \text{tg } a\,\text{tg } b$

44. $\text{tg } (45° + a) - \text{tg } (45° - a) = 2\,\text{tg } 2a$

45. Si $A + B + C = 90°$, probar que $\text{tg } A\,\text{tg } B + \text{tg } B\,\text{tg } C + \text{tg } A\,\text{tg } C = 1$

46. Si $A + B + C = 180°$, probar que $\text{tg } A + \text{tg } B + \text{tg } C = \text{tg } A\,\text{tg } B\,\text{tg } C$

III. Números complejos

1. Calcular $\dfrac{(2-3i)(3-2i)}{(1+i)^2}$

2. Calcular $\dfrac{(2-3i) - (3+2i)}{(3+2i) - (2+i)}$

3. Calcular $(1+i\sqrt{3})^3$ y dar el resultado en forma trigonométrica.

4. Calcular el cociente $\dfrac{a+i}{2+i}$ y determinar el valor que ha de tener a para que el módulo del cociente sea $\sqrt{2}$.

5. Calcular $\sqrt{(4\sqrt{3}+4i)(1+i\sqrt{3})}$

6. Determinar el valor que ha de tener a y b para que el cociente $\dfrac{a+2i}{3+bi}$ sea igual a $1-i$.

7. La suma de los componentes reales de dos números complejos conjugados es 6; la suma de sus módulos es 10. Determinar los afijos de los complejos.

8. Dado el cociente $\dfrac{2x-3yi}{3+4i}$, determinar el lugar geométrico del punto $P(x, y)$ para que el cociente: 1.º Sea imaginario puro. 2.º Tenga un argumento de 50°.

9. Dado el cociente $\dfrac{3-2ki}{4-3i}$, determinar el valor que ha de tener k para que dicho cociente: 1.º Sea imaginario puro. 2.º Sea un número real. 3.º Tenga su afijo en la bisectriz del primer cuadrante.

10. La suma de dos complejos es $3+2i$; la parte real del primero es 2 y el cociente de ambos, imaginario puro. Calcular y dibujar los afijos.

11. Encontrar los valores de los componentes del complejo $a+bi$ que satisfacen la relación $(a+bi)^2 = 8+6i$.

12. Averiguar m y n, de manera que $(m-2i)(n-5i) = 29i$.

13. Determinar m y n en los complejos $2+mi$ y $n-2i$, sabiendo que $(2+mi)(n-2i) = 12+5i$.

14. Calcular x e y para que se verifique $\dfrac{x-1+yi}{x-i+yi} = 2$.

15. Calcular el valor de $\dfrac{i^7-i^{-7}}{2i}$ y representar los afijos de sus raíces cúbicas.

16. Hallar el módulo y el argumento del complejo $-1+i$. Expresar luego dicho complejo en forma trigonométrica y hallar las raíces cúbicas del mismo, expresándolas en forma trigonométrica.

17. Hallar el módulo y el argumento del número complejo $x+yi$, sabiendo que sus componentes satisfacen el sistema $\begin{cases} x^y = y^x \\ x^3 = y^2 \end{cases}$

18. Hallar el complejo que cumple que su cubo es un número real y que el componente real del mismo es superior en una unidad al componente imaginario.

19. Hallar un complejo que multiplicándolo por el cuadrado de otro complejo de argumento 45° y módulo $\sqrt{2}$ dé por producto el cuadrado del complejo situado en el cuarto cuadrante, tenga de módulo 5 y cuyo componente real es 4.

20. Hallar dos números complejos sabiendo que su suma es $4+4i$; que su producto es imaginario puro, y que la parte real de uno de ellos viene dada por el valor de $\sqrt{12+16i}+\sqrt{12-16i}$.

Valores naturales de las funciones trigonométricas y conversión de grados en radianes

Radianes	Grados	sen	cos	tg	cosec	sec	cotg	Grados	Radianes
0'000	0°	0'000	1'000	0'000	∞	1'000	∞	90°	1'571
0'017	1°	0'017	1'000	0'017	57'30	1'000	57'29	89°	1'553
0'035	2°	0'035	0'999	0'035	28'65	1'001	28'64	88°	1'536
0'052	3°	0'052	0'999	0'052	19'11	1'001	19'08	87°	1'518
0'070	4°	0'070	0'998	0'070	14'34	1'002	14'30	86°	1'501
0'087	5°	0'087	0'996	0'087	11'47	1'004	11'43	85°	1'484
0'105	6°	0'105	0'995	0'105	9'567	1'006	9'514	84°	1'466
0'122	7°	0'122	0'993	0'123	8'206	1'008	8'144	83°	1'449
0'140	8°	0'139	0'990	0'141	7'185	1'010	7'115	82°	1'431
0'157	9°	0'156	0'988	0'158	6'392	1'012	6'314	81°	1'414
0'175	10°	0'174	0'985	0'176	5'759	1'015	5'671	80°	1'396
0'192	11°	0'191	0'982	0'194	5'241	1'019	5'145	79°	1'379
0'209	12°	0'208	0'978	0'213	4'810	1'022	4'705	78°	1'361
0'227	13°	0'225	0'974	0'231	4'445	1'026	4'331	77°	1'344
0'244	14°	0'242	0'970	0'249	4'134	1'031	4'011	76°	1'326
0'262	15°	0'259	0'966	0'268	3'864	1'035	3'732	75°	1'309
0'279	16°	0'276	0'961	0'287	3'628	1'040	3'487	74°	1'292
0'297	17°	0'292	0'956	0'306	3'420	1'046	3'271	73°	1'274
0'314	18°	0'309	0'951	0'325	3'236	1'051	3'078	72°	1'257
0'332	19°	0'326	0'946	0'344	3'072	1'058	2'904	71°	1'239
0'349	20°	0'342	0'940	0'364	2'924	1'064	2'747	70°	1'222
0'367	21°	0'358	0'934	0'384	2'790	1'071	2'605	69°	1'204
0'384	22°	0'375	0'927	0'404	2'669	1'079	2'475	68°	1'187
0'401	23°	0'391	0'921	0'424	2'559	1'086	2'356	67°	1'169
0'419	24°	0'407	0'914	0'445	2'459	1'095	2'246	66°	1'152
0'436	25°	0'423	0'906	0'466	2'366	1'103	2'145	65°	1'134
0'454	26°	0'438	0'899	0'488	2'281	1'113	2'050	64°	1'117
0'471	27°	0'454	0'891	0'510	2'203	1'122	1'963	63°	1'100
0'489	28°	0'469	0'883	0'532	2'130	1'133	1'881	62°	1'082
0'506	29°	0'485	0'875	0'554	2'063	1'143	1'804	61°	1'065
0'524	30°	0'500	0'866	0'577	2'000	1'155	1'732	60°	1'047
0'541	31°	0'515	0'857	0'601	1'942	1'167	1'664	59°	1'030
0'559	32°	0'530	0'848	0'625	1'887	1'179	1'600	58°	1'012
0'576	33°	0'545	0'839	0'649	1'836	1'192	1'540	57°	0'995
0'593	34°	0'559	0'829	0'675	1'788	1'206	1'483	56°	0'977
0'611	35°	0'574	0'819	0'700	1'743	1'221	1'428	55°	0'960
0'628	36°	0'588	0'809	0'727	1'701	1'236	1'376	54°	0'942
0'646	37°	0'602	0'799	0'754	1'662	1'252	1'327	53°	0'925
0'663	38°	0'616	0'788	0'781	1'624	1'269	1'280	52°	0'908
0'681	39°	0'629	0'777	0'810	1'589	1'287	1'235	51°	0'890
0'698	40°	0'643	0'766	0'839	1'556	1'305	1'192	50°	0'873
0'716	41°	0'656	0'755	0'869	1'524	1'325	1'150	49°	0'855
0'733	42°	0'669	0'743	0'900	1'494	1'346	1'111	48°	0'838
0'750	43°	0'682	0'731	0'933	1'466	1'367	1'072	47°	0'820
0'768	44°	0'695	0'719	0'966	1'440	1'390	1'036	46°	0'803
0'785	45°	0'707	0'707	1'000	1'414	1'414	1'000	45°	0'785
Radianes	Grados	cos	sen	cotg	sec	cosec	tg	Grados	Radianes

Valor de las razones trigonométricas de los ángulos más corrientes

ÁNGULO	sen	cos	tg	cosec	sec	cotg
$0°$	0	1	0	$\mp\infty$	1	$\mp\infty$
$30° = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45° = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$60° = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$90° = \frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$	0
$120° = \frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$135° = \frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1
$150° = \frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
$180° = \pi$	0	-1	0	$\pm\infty$	-1	$\mp\infty$
$210° = \frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$225° = \frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1
$240° = \frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$270° = \frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm\infty$	-1	$\mp\infty$	0
$300° = \frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$315° = \frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-1
$330° = \frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
$360° = 2\pi$	0	1	0	$\mp\infty$	1	$\mp\infty$